अध्याय

05

ल.स.प. और म.स.प.

LCM (लघुत्तम समापवर्त्य)

दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य वह सबसे छोटी संख्या है जो दी गई प्रत्येक संख्या से पूर्णतः विभाज्य हो।

Ex: 10, 15 और 20 का लघुत्तम समापवर्त्य = 60

HCF (महत्तम समापवर्तक)

यह वह सबसे बड़ी संख्या है जो दो या दो से अधिक दी गई संख्याओं को पूर्णतः विभाजित कर सकती है। कभी-कभी इसे महत्तम समापवर्तक (GCD) भी कहा जाता है।

Ex: 10 और 15 का HCF = 5

LCM और HCF ज्ञात करने की विधियाँ

LCM

अभाज्य गुणनखंड विधि

चरण-1: सभी दी गई संख्याओं को उनके अभाज्य गुणनखंडों में विभाजित करें।

चरण-2: उन अभाज्य गुणनखंडों में से सभी अलग-अलग अभाज्य गुणनखंडों को एकत्रित करें।

चरण-3: प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की अधिकतम उपलब्ध घात में 1 बढ़ाएँ और फिर गुणा करें।

Ex. 18 और 42 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

HINTS

चरण -1: 18 और 42 का गुणनखंड करें।

$18 = 2 \times 3^2$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

चरण-2: 18 या 42 में आने वाले विशिष्ट गुणनखंड 2, 3 और 7 हैं

चरण-3: 2 की उच्चतम घात 2^1, 3 की घात 3^2 तथा 7 की घात 7^1 है।

$\therefore$(18, 42) का लघुत्तम समापवर्त्य = $2^1 \times 3^2 \times 7^1 = 126$.

विभाजन विधि

2	18, 42
3	9, 21
	3, 7

$\therefore$(18, 42) का लघुत्तम समापवर्त्य = $2 \times 3^2 \times 7 = 126$

Ex. 12, 15 और 18 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करें।

HINTS

अभाज्य गुणनखंड $\rightarrow 12 = 2^2 \times 3^1$

$15 = 3^1 \times 5^1$

$18 = 2^1 \times 3^2$

$\therefore$ 12, 15 और 18 का लघुत्तम समापवर्त्य = $2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180$

Ex. 144, 360 और 450 का LCM ज्ञात कीजिए।

HINTS

अभाज्य गुणनखंड $\rightarrow 144 = 24 \times 3^2 = 2^4 \times 3^2$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

$\therefore$(144, 360, 450) का लघुत्तम समापवर्त्य = $2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 3600$

Ex. $2^3 \times 9^2 \times 13$, $2^2 \times 13^2 \times 19$ और $9^3 \times 13^2 \times 19^2$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

HINTS

$2^3 \times 9^2 \times 13$, $2^2 \times 13^2 \times 19$, $9^3 \times 13^2 \times 19^2$ का लघुत्तम समापवर्त्य

$= 2^3 \times 9^3 \times 13^2 \times 19^2$

HCF

अभाज्य गुणनखंड विधि

चरण-1: सभी दी गई संख्याओं को उनके अभाज्य गुणनखंडों में विभाजित करें।

चरण-2: उभयनिष्ठ गुणनखंडों का गुणनफल लीजिए। यह HCF होगा।

Ex. 18 और 42 का HCF ज्ञात कीजिए।

HINTS

चरण-1: 18 और 42 का गुणनखंड करें

$18 = 2 \times 3^2$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

चरण-2: सामान्य गुणनखंड 2 और 3 हैं।

(18, 42) का HCF = उभयनिष्ठ गुणनखंडों का गुणनफल

$= 2 \times 3 = 6 = 2 \times 3 = 6$

दीर्घ विभाजन विधि

```
18 ) 42 ( 2
    -36
      6 ) 18 ( 3
         -18
          00
```

$\therefore$(18, 42) का HCF = 6

अंतर विधि

यदि a, b और c का HCF N है। इसका अर्थ है कि a, b और c, N से विभाज्य हैं, और $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$ भी N से विभाज्य है।

HCF = $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$

Ex. 240, 280 और 560 का HCF ज्ञात कीजिए।

HINTS

240   280   560

अंतर 40   अंतर 280

$\because$ 240, 280 और 560, 40 से पूर्णतः विभाज्य हैं।

$\therefore$ 240, 280 और 560 का म.स.प. = 40

Ex. संख्या 1026, 2268 और 2430 का म.स.प. क्या है?

HINTS

1026   2268   2430

अंतर 1242   अंतर 162

$162 = 2 \times 3^4 = 3 \times 54$

$\because$ 54, 162 का सबसे बड़ा गुणनखंड है जो 1026, 2268 और 2430 को पूर्णतः विभाजित करता है

$\therefore$ 1026, 2268 और 2430 का म.स.प. = 54

भिन्नों का LCM और HCF

LCM

भिन्नों का LCM = $\frac{\text{अंशों का LCM}}{\text{हरों का HCF}}$

$\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\right)$ का LCM = $\frac{(a, c, e) \text{ का LCM}}{(b, d, f) \text{ का HCF}}$

Ex. $\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{4}{7}$ और $\frac{6}{17}$ का LCM ज्ञात कीजिए?

HINTS

भिन्नों का LCM = $\frac{\text{अंशों का LCM}}{\text{हरों का HCF}}$

$= \frac{(1, 2, 4, 6) \text{ का LCM}}{(2, 5, 7, 17) \text{ का HCF}} = \frac{12}{1} = 12$

HCF

भिन्नों का HCF = $\frac{\text{अंशों का HCF}}{\text{हरों का LCM}}$

$\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\right)$ का HCF = $\frac{(a, c, e) \text{ का HCF}}{(b, d, f) \text{ का LCM}}$

Ex. $\frac{4}{5},\frac{24}{25}$ और $\frac{16}{35}$ का HCF ज्ञात कीजिए?

HINTS

भिन्नों का HCF = $\frac{\text{अंशों का HCF}}{\text{हरों का LCM}}$

$\left(\frac{4}{5},\frac{24}{25},\frac{16}{35}\right)$ का HCF = $\frac{(4, 24 \,\&\, 16) \text{ का HCF}}{(5, 25 \,\&\, 35) \text{ का LCM}} = \frac{4}{175}$

दशमलव का LCM और HCF

चरण-1: दशमलव को भिन्न में बदलें

चरण-2: भिन्नों को सरल करें (यदि आवश्यक हो)।

चरण-3: अंश और हर का अलग-अलग LCM या HCF ज्ञात करें।

LCM

भिन्नों का LCM = $\frac{\text{अंशों का LCM}}{\text{हरों का HCF}}$

Ex. 0.15, 0.18 और 0.45 का LCM क्या है?

HINTS

(0.15, 0.18 और 0.45) का LCM = $\left(\frac{15}{100},\frac{18}{100},\frac{45}{100}\right)$ का LCM

$= \frac{(15, 18, 45) \text{ का LCM}}{(100\ 100\ 100) \text{ का HCF}} = \frac{3\times5\times2\times3}{100} = \frac{90}{100} = 0.9$

वैकल्पिक

0.15, 0.18, 0.45 = 15, 18, 45, LCM = 90

दूसरे चरण में हमने जो दशमलव हटाया था उसे पुनः जोड़ा जाएगा = 0.9

Ex. 0.126, 0.36 और 0.96 का LCM क्या है?

HINTS

(0.126, 0.36, 0.96) का LCM = $\frac{(126, 36, 96) \text{ का LCM}}{(1000, 100, 100) \text{ का HCF}}$

अभाज्य गुणनखंड → $126 = 7\times3^2\times2$, $36 = 3^2\times2^2$, $96 = 2^5\times3$

$\therefore$ LCM = $2^5\times3^2\times7 = 2016$

1000, 100, 100 का HCF = 100

$\therefore$ अभीष्ट LCM = $\frac{2016}{100} = 20.16$

वैकल्पिक

0.126,.36,.96= 126, 360, 960, LCM = 20160

तीसरे स्थान से हमने जो दशमलव हटाया है उसे फिर से जोड़ा जाएगा = 20.16

HCF

भिन्नों का HCF = $\frac{\text{अंशों का HCF}}{\text{हरों का LCM}}$

Ex. 0.48, 0.72 और 0.108 का HCF ज्ञात कीजिए।

HINTS

$0.48 = \frac{48}{100}, 0.72 = \frac{72}{100}, 0.108 = \frac{108}{1000}$

भिन्नों का HCF = $\frac{(48, 72, 108) \text{ का HCF}}{(100, 100, 1000) \text{ का LCM}} = \frac{12}{1000} = 0.012$

वैकल्पिक

0.48, 0.72, 0.108 = 480, 720, 108, HCF = 12

तीसरे चरण से हमने जो दशमलव हटाया है उसे फिर से जोड़ा जाएगा = 0.012

Ex. 0.70, 0.35 और 1.05 का HCF ज्ञात कीजिए।

HINTS

$0.70 = \frac{70}{100}, 0.35 = \frac{35}{100}, 1.05 = \frac{105}{100}$

भिन्नों का HCF = $\frac{(70, 35, 105) \text{ का HCF}}{(100, 100, 100) \text{ का LCM}} = \frac{35}{100} = 0.35$

वैकल्पिक

0.70,0.35,1.05 = 70, 35, 105 HCF = 35

दूसरे स्थान से हमने जो दशमलव हटाया है उसे फिर से जोड़ा जाएगा = 0.35

नोट:- वैकल्पिक दृष्टिकोण में सबसे पहले हम सभी संख्याओं को बराबर करते हैं, दशमलव हटाते हैं और उनके पीछे शून्य लगाते हैं। फिर उसके बाद हम उस संख्या का HCF या LCM ज्ञात करते हैं, जो भी दिया गया हो।

महत्वपूर्ण परिणाम: $(A^M \pm 1, A^N \pm 1)$ का HCF = $(A^{HCF(M,N)} \pm 1)$

Ex. वह सबसे बड़ी संख्या क्या है जो $(2^{35} - 1)$ और $(2^{91} - 1)$ दोनों को विभाजित करती है?

HINTS सबसे पहले घात का HCF ज्ञात करें।

(35, 91) का HCF = 7

सबसे बड़ी संख्या = $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

Ex. $(3^{45} - 1)$ और $(3^{35} - 1)$ का म.स.प. क्या है?

HINTS सबसे पहले घात का HCF ज्ञात करें।

(45, 35) का HCF = 5

$(3^{45} - 1)$ और $(3^{35} - 1)$ का HCF $= 3^5 - 1 = 243 - 1 = 242$

Ex. $(4^{63} + 1)$ और $(4^{45} + 1)$ का म.स.प. क्या है?

HINTS सबसे पहले घात का HCF ज्ञात करें।

(63, 45) का म.स.प. = 9

$(4^{63} + 1)$ और $(4^{45} + 1)$ का म.स.प. $= 4^9 + 1$

बहुपदों का LCM और HCF

LCM

दो या अधिक बहुपदों का लघुत्तम समापवर्त्य "न्यूनतम घात का सार्वगुणज" होता है।

Ex. बहुपदों $(x^2 - 5x + 6)$ और $(x^2 - 7x + 10)$ का LCM ज्ञात कीजिए

HINTS

$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6$
$= x(x-2) - 3(x-2)$
$= (x-2)(x-3)$

$x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10$
$= x(x-2) - 5(x-2)$
$= (x-2)(x-5)$

$\therefore$ LCM $= (x-2)(x-3)(x-5)$

Ex. निम्नलिखित बहुपदों का LCM ज्ञात कीजिए:
$x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 2x - 15$ और $x^2 - 9$

HINTS

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$,
$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$ और $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.
$\therefore$ LCM $= (x-2)(x-3)(x+3)(x-5)$

HCF

दो या अधिक बहुपदों का H.C.F. "उच्चतम घात का उभयनिष्ठ गुणनखंड" होता है।

Ex. निम्नलिखित बहुपद का HCF ज्ञात कीजिए-
$15x^2 + 8x - 12,\ 3x^2 + x - 2,\ 3x^2 - 2x,\ 9x^2 - 12x + 4.$

HINTS

बहुपद के गुणनखंड
$15x^2 + 8x - 12 = (3x-2)(5x+6)$
$3x^2 + x - 2 = (3x-2)(x+1)$
$9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$
$3x^2 - 2x = x(3x-2)$
$\therefore$ HCF $= (3x-2)$

Ex. निम्नलिखित का HCF ज्ञात कीजिए-
$6xy^2z,\ 8x^2y^2z^2,\ 12x^3y^3z^3$

HINTS

$6xy^2z = 2 \times 3 \times x \times y \times y \times z$
$8x^2y^2z^2 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times y \times y \times z \times z$
$12x^3y^3z^3 = 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x \times y \times y \times y \times z \times z \times z$
$\therefore$ HCF $= 2 \times x \times y \times y \times z = 2xy^2z$

LCM और HCF से संबंधित महत्वपूर्ण गुण और मानक सूत्र

1. दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM
2. संख्याओं के किसी दिए गए समूह का LCM उसी संख्याओं के HCF से अधिक होना चाहिए।
3. यदि x और y का HCF, H है, तो HCF होगा
   (i) x, $(x + y)$ भी H है।
   (ii) x, $(x - y)$ भी H है।
4. ऋणात्मक संख्याओं के लिए HCF और LCM परिभाषित नहीं हैं।

Ex. दो संख्याओं का HCF और LCM क्रमशः 6 और 5040 है। यदि उनमें से एक संख्या 210 है, तो दूसरी संख्या क्या होगी?

HINTS माना, दूसरी संख्या = x

हम जानते हैं कि, दो संख्याओ का गुणनफल = LCM × HCF

$\Rightarrow 6 \times 5040 = 210 \times x \Rightarrow x = 144$

Ex. दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF) उनके लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) का $\frac{1}{20}$ है। यदि एक संख्या 96 है और लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्त्य का अंतर 456 है, तो दूसरी संख्या क्या होगी?

HINTS माना, LCM = 20 इकाई, तब HCF = 1 इकाई

अंतर (19 इकाई) = 456 $\Rightarrow$ 1 इकाई = 24

अब, LCM × HCF = पहली संख्या × दूसरी संख्या

$\Rightarrow (20 \times 24) \times (1 \times 24) = 96 \times$ दूसरी संख्या

$\Rightarrow$ दूसरी संख्या $= \frac{(20 \times 24) \times (1 \times 24)}{96} = 120$

Ex. दो संख्याओं का गुणनफल 2028 है और उनका HCF, 13 है। ऐसे युग्मों की संख्या है:

HINTS माना, पहली संख्या = x और दूसरी संख्या = y

$13x \times 13y = 2028 \Rightarrow xy = 12$

संभावित युग्म = (1 × 12), (3 × 4)

$\therefore$ ऐसे जोड़ों की संख्या 2 है।

Ex. दो संख्याओं का योग 528 है और उनका HCF, 33 है। ऐसे संभावित जोड़ों की संख्या क्या है?

HINTS HCF = 33

पहली संख्या = $33x$, दूसरी संख्या = 33y

पहली संख्या + दूसरी संख्या = 528

$\Rightarrow 33x + 33y = 528 \Rightarrow 33(x + y) = 528$

$\Rightarrow (x + y) = 16$

1 15 ✓
2 14 × (सह-अभाज्य नहीं हैं)
3 13 ✓
4 12 × (सह-अभाज्य नहीं हैं)
5 11 ✓
6 10 (×) (सह-अभाज्य नहीं हैं)
7 9 (✓)
8 8 (×) (सह-अभाज्य नहीं हैं)

संभावित युग्म = (1, 15), (3, 13), (5, 11), (7, 9)

Ex. दो संख्याओं का योग 1215 है और उनका HCF, 81 है। यदि संख्याएँ 500 और 700 के बीच हैं, तो संख्याओं के व्युत्क्रमों का योग क्या है?

HINTS पहली संख्या = $81x$, दूसरी संख्या = $81y$

प्रश्नानुसार,

$81x + 81y = 1215 \Rightarrow 81(x + y) = 1215$

$\Rightarrow x + y = 15$

1 14 (×) (∵ 81 × 1 = 81 संख्या 500 – 700 के बीच नहीं है)

2 13 (×)

4 11 (×)

7 8 (✓)

पहली संख्या = 81 × 7, दूसरी संख्या = 81 × 8

व्युत्क्रमो का योग = $\frac{1}{81\times7}+\frac{1}{81\times8}=\frac{1}{81}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{1}{81}\left(\frac{15}{56}\right)=\frac{5}{1512}$

संख्याओं के अनुपात पर आधारित

Ex. दो संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य 84 है। यदि संख्याएँ 2 : 3 के अनुपात में हैं, तो संख्याओं का योग है:

HINTS माना, संख्याएँ 2K और 3K होंगी

(2K, 3K) का HCF = K

तब, (2K, 3K) का LCM $\Rightarrow 2 \times 3 \times K = 84 \Rightarrow K = 14$

∴ संख्याओं का योग = 2K + 3K = 5K = 5 × 14 = 70

Ex. तीन संख्याओं का अनुपात 5 : 6 : 8 है, तथा उनका लघुत्तम समापवर्त्य 1200 है। संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS मान लीजिए, संख्याएँ क्रमशः $5x$, $6x$ और $8x$ हैं।

LCM = $120x \Rightarrow 120x = 1200 \Rightarrow x = 10$

∴ संख्याओं का योग = $19x$ = 19 × 10 = 190

LCM और HCF का अनुप्रयोग

LCM

(i) सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से पूर्णतः विभाज्य हो
= (x, y, z) का LCM

(ii) वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे x, y, z से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल r बचे
= (x, y, z) का लघुत्तम समापवर्त्य + r

(iii) वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे x, y, z से विभाजित करने पर क्रमशः a, b, c शेषफल बचे
= (x,y, z) का LCM – k [जहाँ, k = (x – a) = (y – b) = (z – c)]

HCF

(i) वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z को पूर्णतः विभाजित करेगी
= (x, y, z) का HCF

(ii) वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, yऔर z को पूर्णतः विभाजित करने पर शेषफल r बचें
= [(x – r), (y – r), (z – r)] का HCF या
[(x – y), (y – z), (z – x)] का HCF

(iii) वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z को पूर्णतः विभाजित करने पर क्रमशः a, b और c शेषफल बचें
= [(x – a), (y – b), (z – c)] का HCF

Ex. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 105, 91 और 130 से पूर्णतः विभाज्य हो।

HINTS (105, 91, 130) का LCM = 2730

Ex. मान लीजिए x वह सबसे छोटी संख्या है जिसे 5, 6, 7 और 8 से भाग देने पर प्रत्येक स्थिति में 3 शेषफल बचता है, लेकिन 9 से भाग देने पर शून्य शेषफल बचता है। x के अंकों का योग है:

HINTS (5, 6, 7, 8) का LCM = 840, r = 3

संख्या = 840k + 3

जब संख्या 9 से विभाजित हो, r = 0

k = 2 रखने पर

अभीष्ट संख्या = 840 × 2 + 3 = 1683

संख्याओं का योग = 1 + 6 + 8 + 3 = 18

Ex. वह सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक क्या है जिसे 4, 5, 8, 9 से विभाजित करने पर क्रमशः 3, 4, 7, 8 शेषफल बचता है?

HINTS अंतर (k) = 4 – 3 = 5 – 4 = 8 – 7 = 9 – 8 = 1

4, 5, 8, 9 का LCM = 360

∴ अभीष्ट संख्या = 360 – 1 = 359

Ex. पांच अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या क्या है जिसे 6,7,8 और 9 से विभाजित करने पर क्रमशः 4, 5, 6 और 7 शेषफल बचते हैं?

HINTS उभयनिष्ठ अंतर = (6 – 4) = (7 – 5) = (8 – 6) = (9 – 7) = 2

6,7, 8 और 9 का LCM = 504

अभीष्ट संख्या = 504k – 2, जहाँ k कोई पूर्णांक हैं

चूंकि हमें सबसे बड़ी पांच अंकीय संख्या ज्ञात करनी है, इसलिए यह 504 का गुणज और 99999 के निकटतम होनी चाहिए।

k = 198 रखने पर,

504k = 504 × 198 = 99792

∴ अभीष्ट संख्या = 99792 – 2 = 99790

Ex. सुबह 10 बजे 5 घंटियाँ एक साथ बजती हैं। ये घंटियाँ क्रमशः 12 सेकंड, 18 सेकंड, 24 सेकंड, 36 सेकंड और 45 सेकंड के अंतराल पर बजती हैं। ये घंटियाँ फिर से किस समय एक साथ बजेंगी?

HINTS 12, 18, 24, 36, 45 का LCM = 360 सेकंड

$= \frac{360}{60}$ मिनट = 6 मिनट

सुबह 10:06 बजे सभी घंटियाँ पुनः एक साथ बजती हैं।

Ex. स्वप्निल, आकाश और विनय एक गोलाकार स्टेडियम के चारों ओर दौड़ना शुरु करते हैं। वे क्रमशः 36 सेकंड, 48 सेकंड और 42 सेकंड में अपनी परिक्रमा पूरी करते हैं। कितने सेकंड बाद वे शुरुआती बिंदु पर एक साथ होंगे?

HINTS $36 = 2^2 \times 3^2$,

$48 = 2^4 \times 3$,

$42 = 2 \times 3 \times 7$

(36, 48, 42) का LCM = $2^4 \times 3 \times 3 \times 7 = 16 \times 9 \times 7 = 1008$

अतः, 1008 सेकंड के बाद तीनों रेसर प्रारंभिक बिंदु पर एक साथ मिलेंगे।

Ex. एक माली के पास रोपने के लिए कुछ पौधे थे। उसने उन्हें 7, 8, 9 और 12 की पंक्तियों में लगाने की कोशिश की। लेकिन उसके पास हमेशा एक पौधा बचता था। जब उसने उन्हें 11 की पंक्तियों में लगाने की कोशिश की, तो उसके पास एक भी पौधा नहीं बचा। माली के पास पौधों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS $N = (7, 8, 9, 12)$ n + 1 का LCM = 504n + 1

$N = \frac{504n+1}{11} = 9n + 1$

n = 6 रखने पर,

$\therefore N = 504 \times 6 + 1 = 3024 + 1 = 3025$

पौधों की न्यूनतम संख्या = 3025

Ex. छह घंटियाँ सुबह 7:59 बजे एक साथ बजना शुरू होती हैं। वे क्रमशः 3, 6, 9, 12 और 15 सेकंड के अंतराल पर बजती हैं। सुबह 8:16 बजे तक वे कितनी बार एक साथ बजेंगी? (सुबह 7:59 बजे की घंटियों को छोड़कर)

HINTS (3, 6, 9, 12, 15) का LCM = 180

$\Rightarrow$ घंटियाँ प्रत्येक 180 सेकंड या $\frac{180}{60} = 3$ मिनट के बाद बजती हैं।

सुबह 7:59 से 8:16 तक, कुल 17 मिनट का अंतराल होता है।

घंटियों के बजने की संख्या = $\frac{17}{3} \sim 5$

Ex. वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो 216, 248 और 312 को विभाजित करने पर समान शेषफल प्रदान करे।

HINTS

248 — 216 अंतर 32; 312 — 248 अंतर 64; 312 — 216 अंतर 96

32, 64 और 96 में से, वह सबसे छोटी संख्या जो सभी दी गई संख्याओं को पूर्णतः विभाजित करती है, 32 है।

इसलिए, सबसे बड़ी संख्या जो सभी संख्याओं को विभाजित करने पर समान शेषफल देती है, वह 32 है।

Ex. वह सबसे बड़ी संख्या क्या है जिससे 156, 181 और 331 को विभाजित किया जाए, यदि प्रत्येक स्थिति में शेषफल 6 बचे?

HINTS 156 – 6 = 150, 181 – 6 = 175, 331 – 6 = 325

(150, 175, 325) का HCF = 25

Ex. वह सबसे बड़ी संख्या क्या है जिससे 2675 और 2320 को विभाजित करने पर क्रमशः शेषफल 5 और 6 बचते हैं?

HINTS यदि कोई संख्या 2675 को विभाजित करती है और शेषफल 5 बचाती है तो इसका अर्थ है कि यह संख्या (2675 - 5) को पूरी तरह से विभाजित करेगी और (2320 - 6) को भी।

$2670 = 178 \times 15, 2314 = 178 \times 13$

अतः 2670 और 2314 का HCF = 178

$\therefore$ 178 सबसे बड़ी संख्या है जो 2675 और 2320 को विभाजित करने पर क्रमशः 5 और 6 शेषफल बचाती है।

Ex. जब 2388, 4309 और 8151 को एक निश्चित 3-अंकीय संख्या से विभाजित किया जाता है, तो प्रत्येक स्थिति में शेषफल समान होता है, शेषफल है।

HINTS

4309 — 2388 अंतर 1921; 8151 — 4309 अंतर 3842; 8151 — 2388 5763

(1921, 3842, 5763) का HCF = 1921

1921 के गुणनखंड = 17 × 113

तो तीन अंकों की संख्या = 113

जब हम 2388, 4309 और 8151 को 113 से भाग देंगे तो शेषफल 15 प्राप्त होगा।

$\therefore$ अभीष्ट शेषफल = 15

Ex. एक आयताकार कमरे के फर्श की विमाएँ 3 मीटर 60 सेमी × 5 मीटर 40 सेमी हैं। इसे वर्गाकार टाइलों से ढकना है। सबसे बड़ी वर्गाकार टाइल जो लगाई जा सकती है, उसकी विमा क्या है? इसे ढकने के लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी?

HINTS आयताकार कमरे के फर्श के आयाम $\Rightarrow$ 3 मीटर 60 सेमी = 360 सेमी और 5 मीटर 40 सेमी = 540 सेमी।

$360 = 2 \times 180, 540 = 3 \times 180$

$\therefore$ HCF = 180

इसका अर्थ है कि सबसे बड़ी वर्गाकार टाइल का आयाम 180 सेमी × 180 सेमी होना चाहिए।

आवश्यक टाइल्स की संख्या

$= \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{वर्गाकार टाइलों का क्षेत्रफल}} = \frac{360 \times 540}{180 \times 180} = 6$

Ex. विभाजन विधि द्वारा दो संख्याओं का HCF ज्ञात करने में चार क्रमिक भागफल क्रमशः 4, 3, 6 और 5 हैं तथा अंतिम भाजक 12 है। दो संख्याएँ क्या हैं?

HINTS

1176)5076(4
4704
372)1176(3
1116
60)372(6
360
12)60(5
60
0

अतः दो संख्याएँ 1176, 5076 हैं।

Ex. एक दूध विक्रेता के पास 75 लीटर गाय का दूध, 45 लीटर टोन्ड दूध और 30 लीटर फुल क्रीम दूध है। इन्हें अलग-अलग ट्रे में इस प्रकार रखा जाना चाहिए कि प्रत्येक ट्रे में दूध की मात्रा समान हो और एक ट्रे में दो प्रकार के दूध न मिलें। सारा दूध रखने के लिए कम से कम कितनी ट्रे की आवश्यकता होगी?

HINTS 75, 45, 30 का HCF = 15

आवयश्क ट्रे की न्यूनतम संख्या = $\frac{75}{15} + \frac{45}{15} + \frac{30}{15}$

$= 5 + 3 + 2 = 10$

Ex. 13, a, b, c चार भिन्न संख्याएँ हैं और संख्याओं के प्रत्येक युग्म (13, a) ; (13, b); (13, c) का HCF 13 है, जहाँ a,b,c प्रत्येक 60 से कम हैं और $a < b < c$ है। $\frac{a+c}{b}$ का मान क्या है?

HINTS a, b, c 13 के गुणज होने चाहिए, क्योंकि HCF, 13 है

13 और a का HCF = 13 $\Rightarrow$ a = 26

13 और b का HCF = 13 $\Rightarrow$ b = 39

13 और c का HCF = 13 $\Rightarrow$ c = 52

यहाँ, $a < b < c < 60$

$\therefore \frac{(a+c)}{b} = \frac{(26+52)}{39} = \frac{78}{39} = 2$

अध्याय 06

अनुक्रम और श्रृंखला

श्रेणी के प्रकार

- समांतर श्रेणी
- गुणोत्तर श्रेणी
- हरात्मक श्रेणी

मूल शब्दावली

अनुक्रम

अनुक्रम एक विशिष्ट पैटर्न या नियम का पालन करने वाली संख्याओं की एक क्रमबद्ध सूची है।

Ex. a_1, a_2, a_3, a_4.........

2, 4, 6, 8 ....

श्रेणी

श्रेणी एक विशिष्ट प्रकार का अनुक्रम है, जिसमें प्रत्येक पद एक निश्चित नियम का उपयोग करके अपने पूर्ववर्ती पद से व्युत्पन्न होता है।

श्रृंखला

श्रृंखला किसी अनुक्रम के पदों का योग होती है।

S = a_1, a_2, a_3, a_4......... (एक अनुक्रम है)

तो व्यक्त योग = $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$......... (एक श्रृंखला है)

समांतर श्रेणी

संख्याओं के किसी क्रम को समांतर श्रेणी (A.P.) में कहा जाता है यदि उसके किन्हीं दो क्रमागत पदों के बीच का अंतर स्थिर हो। इस स्थिरांक को सार्व अंतर (c.d.) कहते हैं और सामान्यतः इसे d से दर्शाया जाता है।

मानक रूप : a, (a + d), (a + 2d),.........

जहाँ a पहला पद है और d एक समांतर श्रेणी के अनुक्रम का सार्व अंतर है।

(i) एक समांतर श्रेणी का nवाँ पद

$a_n = a + (n - 1)d$

(ii) किसी समांतर श्रेणी का nवाँ पद अंतिम पद से

$a_n = l - (n - 1)d$

(iii) एक समांतर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}\left[a + \underbrace{a + (n-1)d}_{a_n}\right] = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[\text{पहला पद} + \text{अंतिम पद}]$$

(iv) यदि किसी समांतर श्रेणी के दो पद a_m और a_n ज्ञात हैं तो

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

Ex. 15, 20, 25 .... 135 के बीच कितने पद हैं?

HINTS माना पदों की संख्या = n

$a_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow 135 = 15 + (n - 1)5 \Rightarrow 24 = n - 1$

$\Rightarrow n = 25$

Ex. अनुक्रम 26, 20, 14, 8 ...... का 21वाँ पद ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम पद (a) = 26

अंतर (d) = – 6

कुल पद (n) = 21

$a_n = a + (n - 1)d$

$\therefore a_{21} = a + 20d$

$= 26 + 20(-6)$

$= 26 - 120 = -94$

Ex. अनुक्रम 249, 260, 271...... से 153 पदों तक का योगफल ज्ञात कीजिए

HINTS प्रथम पद (a) = 249

अंतर (d) = 260 – 249 = 11

कुल पद (n) = 153

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{153} = \frac{153}{2}[2 \times 249 + (153 - 1) \times 11]$$

$$= \frac{153}{2} \times (498 + 1672) = 166005$$

Ex. एक समान्तर श्रेणी (A.P.) जिसका 17वाँ और पहला पद क्रमशः 315 और 251 है। 24 पदों तक का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम पद (a) = 251 ..... (i)

17वाँ पद (a + 16d) = 315 ..... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$$16d = 64 \Rightarrow d = \frac{64}{16} = 4$$

$$\because S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{24} = \frac{24}{2}(2 \times 251 + 23 \times 4)$$

$= 12 \times 594 = 7128$

AM =

Ex. एक व्यक्ति जनवरी 2018 में ₹1750 बचाता है और हर महीने अपनी बचत में ₹95 की वृद्धि करता है। वर्ष 2018 में उस व्यक्ति की वार्षिक बचत कितनी है?

HINTS $\because S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times 1750 + (12 - 1) \times 95]$$

$= 6(3500 + 11 \times 95) = 27270$

समांतर श्रेणी के पदों का चयन

- समांतर श्रेणी में लगातार तीन पद = a – d, a, a + d
- समांतर श्रेणी में लगातार चार पद = a–3d, a–d, a+d, a+3d
- समांतर श्रेणी में लगातार पाँच पद = a–2d, a–d, a, a+d, a+2d

Ex. समांतर श्रेणी में तीन संख्याओं का योग -3 है और उनका गुणनफल 8 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, संख्याएँ = a − d, a, a + d

प्रश्नानुसार,

$(a - d) + a + (a + d) = -3$

$\Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$

अब, $(-1 - d) \times (-1) \times (-1 + d) = 8$

$\Rightarrow d^2 - 1 = 8$

$\Rightarrow d = \pm 3$

जब $d = -3$, संख्याएँ $\rightarrow 2, -1, -4$

जब $d = 3$, संख्याएँ $\rightarrow -4, -1, 2$

> सामान्य अंतर d_1 और d_2 वाले दो समान्तर श्रेणी के सामान्य पद भी सामान्य अंतर वाले समान्तर श्रेणी में हैं

= ल.स.प. $\rightarrow \{d_1, d_2\}$

Ex. दी गई दो समान्तर श्रेणी के लिए 10वाँ सामान्य पद ज्ञात कीजिए:

3, 7, 11, 15, 19 .... और 1, 6, 11, 16, 21 ....

HINTS $d_1 = 4$ और $d_2 = 5$

अतः, अभीष्ट श्रेणी (d) का सार्वांतर = ल.स.प. (4, 5)

$\therefore d = 20$

दी गई श्रृंखला में पहला उभयनिष्ठ पद 11 है।

अतः, 11, 31, 51 ....

$a_{10} = 11 + 9 \times 20 = 11 + 180 = 191$

> एक समान्तर श्रेणी में, आरंभ और अंत से समान दूरी पर स्थित पदों का योग समान होता है।

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$

$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$

Ex. एक समान्तर श्रेणी के प्रथम 6 पदों का योग ज्ञात कीजिए यदि तीसरा और चौथा पद 5 और 8 है

13

$a_1\ a_2,\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6$

13

13

$a_3 + a_4 = a_2 + a_5 = a_1 + a_6 = 5 + 8 = 13$

आवश्यक योग = 3 × 13 = 39

समांतर माध्य

जब तीन या अधिक संख्याएँ समांतर श्रेणी में होती हैं, तो पहले और अंतिम पदों के बीच की संख्याओं को उनके बीच समांतर माध्य (A.M.) के रूप में जाना जाता है।

(i) यदि A दो संख्याओं a और b के बीच का समांतर माध्य है, तो,

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(a + b)}$$

(ii) सामान्यतः, यदि a, b, c, ... n पद समांतर श्रेणी में हों, तो उनके

$$\boxed{AM = \frac{a + b + c + \ldots n \text{ पद}}{n}}$$

Ex. 6, 10 और 14 में कौन सी संख्या जोड़नी होगी कि समांतर माध्य 12 हो जाए?

HINTS मान लीजिए, संख्या = x

$$\frac{6 + 10 + 14 + x}{4} = 12 \Rightarrow \frac{30 + x}{4} = 12 \Rightarrow x = 18$$

गुणोत्तर श्रेणी

संख्याओं के अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेणी में तब कहा जाता है जब किसी भी पद (पहले पद को छोड़कर) का उसके पिछले पद से अनुपात सदैव स्थिर रहता है। इस स्थिर अनुपात को उसका सार्व अनुपात कहते हैं और इसे सामान्यतः r से दर्शाया जाता है।

मानक रूप : $a, ar, ar^2, \ldots\ldots$

जहाँ a पहला पद है और r एक गुणोत्तर श्रेणी के अनुक्रम का सामान्य अनुपात है।

(i) शुरुआत से एक गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद $a_n = ar^{(n-1)}$

(ii) अंत से G.P. का nवाँ पद $a_n = \frac{1}{r^{n-1}}$ द्वारा दिया गया है

(iii) m पदों वाली एक निश्चित गुणोत्तर श्रेणी (GP) का अंतिम से 'n' पद" $= ar^{m-n}$

(iv) आरंभ से nवाँ पद × अंत से nवाँ पद

= प्रथम पद × अंतिम पद = $a \times l$

(v) एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग

$$S_n \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}; r \neq 1 \text{ और } r < 1 \\ \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}; r \neq 1 \text{ और } r > 1 \end{cases}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}; -1 < r < 1$$

यदि सार्व अनुपात 1 के बराबर है, तो

GP के पहले n पदों का योग $S_n = na$ द्वारा दिया जाता है

> (I) a, b, c → AP → 2b = a + c
> a, b, c → GP → $b^2 = ac$
> (II) GP का कोई भी पद 0 नहीं हो सकता।

गुणोत्तर श्रेणी में चुने गए पदों की संख्या

- लगातार तीन पद = $\frac{a}{r}, a, ar$
- लगातार चार पद = $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$
- लगातार पाँच पद = $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

Ex. गुणोत्तर श्रेणी (G.P) 6, 18, 54 .... 39366 में कितने पद हैं?

HINTS प्रथम पद (a) = 6

अनुपात (r) = $\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{प्रथम पद}} = \frac{18}{6} = 3$

अंतिम पद $(a_n) = 39366$

$\therefore\ a_n = ar^{n-1} \Rightarrow 39366 = ar^{n-1}$

$\Rightarrow 6 \times 3^{n-1} = 39366$

$\Rightarrow 3^{n-1} = 6561$

$\Rightarrow 3^{n-1} = 3^8$

$\Rightarrow n - 1 = 8$ (घातों की तुलना)

$\Rightarrow n = 9$

Ex. यदि पहला पद 125 है और सार्वानुपात $\frac{2}{5}$ है, तो गुणोत्तर श्रेणी का चौथा पद क्या होगा?

HINTS प्रथम पद (a) = 125, सार्वानुपात (r) = $\frac{2}{5}$

पदों की संख्या (n) = 4

$a_n = ar^{n-1}$

$\therefore\ a_4 = 125 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{4-1}$

$= 125 \times \frac{2\times2\times2}{5\times5\times5} = 8$

Ex. यदि गुणोत्तर श्रेणी का दूसरा और पांचवां पद क्रमशः 24 और 81 है, तो गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

HINTS दूसरा पद (ar) = 24 ....(i)

पाँचवां पद (ar^4) = 81 ....(ii)

(ii) को (i) से भाग दें,

$r^3 = \frac{81}{24} = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$

समीकरण (i) से

$ar = 24 \Rightarrow a \times \frac{3}{2} = 24 \Rightarrow a = 16$

$GP = 16,\ 16 \times \frac{3}{2} = 24,\ 24 \times \frac{3}{2}$

$= 36,\ 36 \times \frac{3}{2} = 54$

GP = 16, 24, 36, 54 ....

Ex. यदि एक गुणोत्तर श्रेणी (GP) का पहला पद 12 है और सार्वानुपात 4 है, तो चारों पदों का योग ज्ञात कीजिए?

HINTS प्रथम पद (a) = 15, सार्वानुपात (r) = 4, पदों की संख्या (n) = 4

$\therefore\ S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ (यदि, r > 1)

$S_4 = \frac{15(4^4-1)}{4-1} = \frac{15(256-1)}{3}$

= 1275

Ex. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणी (GP) का योग ज्ञात कीजिए?
यदि $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ .... n पदों तक

HINTS प्रथम पद (a) = $\frac{1}{3}$

सार्वानुपात (r) = $\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{प्रथम पद}} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{3}$

गुणोत्तर श्रेणी का योग

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ (यदि, r < 1)

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{\frac{2}{3}}$$

$= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

Ex. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणी (GP) का योग ज्ञात कीजिए
यदि $\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \frac{9}{10000}$ .... n पदों तक

HINTS प्रथम पद (a) = $\frac{9}{10}$

सार्वानुपात (r) = $\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{प्रथम पद}} = \frac{9}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{10}$

एक गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ (If, r < 1)

$$S_n = \frac{9}{10}\left[\frac{1\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}\right] = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = \left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

गुणोत्तर माध्य

जब तीन या अधिक संख्याएँ गुणोत्तर श्रेणी में होती हैं, तो पहले और अंतिम पदों के बीच की संख्याओं को उनके बीच ज्यामितीय माध्य (G.M) के रूप में जाना जाता है।

(i) यदि G दो संख्याओं a और b के बीच का GM है तो

$\boxed{G = \sqrt{ab}}$

(ii) सामान्यतः, यदि a_1, a_2, a_3, ... n पद गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो

$\boxed{GM = (a_1.a_2.....a_n)^{\frac{1}{n}}}$

Ex. 4, 2 और 27 का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए

HINTS $GM = \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{4\times2\times27} = 2 \times 3 = 6$

Ex. $\frac{3}{4}$ और $\frac{48}{25}$ का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

HINTS $GM = \sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{48}{25}} = \sqrt{\frac{144}{100}} = 1.2$

Ex. दो संख्याओं का गुणोत्तर माध्य 18 है और एक संख्या 8 है। दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS मान लीजिए दूसरी संख्या =b

$GM = \sqrt{8\times b} = 18$

$8 \times b = 18^2 \Rightarrow b = \frac{324}{8} = 40.5$

Ex. दो अवलोकनों के लिए, योग S है और गुणनफल P है। इन दो अवलोकनों का हरात्माक माध्य क्या है?

HINTS a + b = S, a × b = P

$HM = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2P}{S}$

Ex. यदि x और y का समांतर और गुणोत्तर माध्य क्रमशः 8 और $3\sqrt{7}$ है, तो $x^3 + y^3$ का मान क्या है?

HINTS $\frac{x+y}{2} = 8 \Rightarrow x+y = 16$

$\sqrt{xy} = 3\sqrt{7} \Rightarrow xy = 63$

हिट और ट्रायल द्वारा,

$x = 9,\ y = 7$

$\therefore x^3 + y^3 = 9^3 + 7^3 = 1072$

स्वयं करें

Ex. दो धनात्मक संख्याओं का समांतर माध्य और गुणोत्तर माध्य 5:4 के अनुपात में हैं और ज्यामितीय माध्य 20 है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
[Ans. 40 और 10]

Ex. दो संख्याओं का समांतर माध्य 13 है और उनका गुणोत्तर माध्य 12 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
[Ans. 18 और 8]