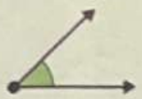
Lines & Angles (रेखाएँ और कोण)

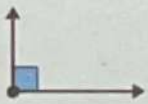
कोण: दो रेखाओं के बीच का झुकाव कोण कहलाता है। एक आकृति जो दो किरणों या रेखाओं से बनती है जो एक सामान्य अंतः बिन्दु साझा करती है कोण कहलाती है। दो किरणों को एक कोण की भुजा कहा जाता है और उभयनिष्ठ अंतः बिन्दु को शीर्ष कहा जाता है।

कोण के प्रकार/Types of angles

1. न्यून कोण (Acute angle)



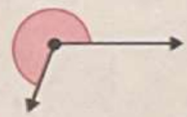
2. समकोण Right angle



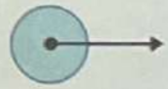
3. रेखीय कोण Straight angle

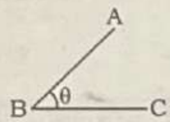
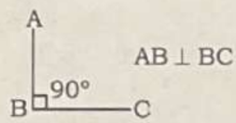
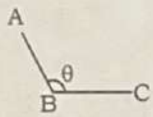
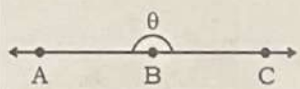
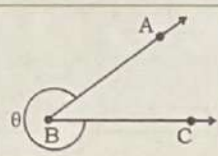
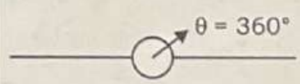
4. अधिक कोण Obtuse angle

5. वृहत कोण Reflex angle



6. पूर्ण कोण Complete angle

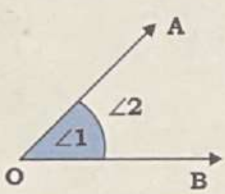


न्यून कोण: यदि कोई कोण 0° से बड़ा तथा 90° से छोटा हो। $0° < \theta < 90°$ (∠ABC एक न्यून कोण है।)		**समकोण:** यदि कोई कोण 90° के बराबर हो तो उसे समकोण कहते हैं। $\theta = 90°$ (∠ABC एक समकोण है।)	
अधिक कोण: यदि कोई कोण 90° से बड़ा तथा 180° से छोटा हो तो उसे अधिक कोण कहते हैं। $90° < \theta < 180°$ (∠ABC एक अधिक कोण है।)		**ऋजु कोण/सीधी कोण:** यदि कोई कोण 180° के बराबर हो तो उसे ऋजु कोण/सीधी कोण कहते हैं। $\theta = 180°$ (∠ABC एक ऋजु कोण/सीधी कोण है।)	
प्रतिवर्ती कोण: यदि कोई कोण 180° से बड़ा तथा 360° से छोटा हो तो उसे प्रतिवर्ती कोण कहते हैं। $180° < \theta < 360°$ (∠ABC एक प्रतिवर्ती कोण है।)		**पूर्ण कोण:** यदि कोई कोण 360° के बराबर हो तो उसे पूर्ण कोण कहते हैं।	

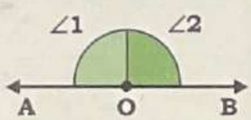
युग्म कोण (Pair angle)

युग्म कोण/Pair Angles

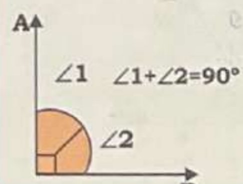
आसन्न कोण (Adjacent Angle)



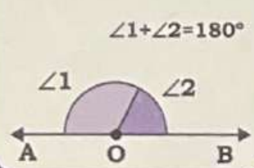
रैखिक युग्म कोण (Linear pari Angle)



पूरक कोण (Complementary Angle)



संपूरक कोण (Supplementary Angle)



Triangle (त्रिभुज)

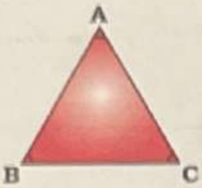
त्रिभुज के प्रकार

कोणों के आधार पर
- न्यूनकोण त्रिभुज
- समकोण त्रिभुज
- अधिक कोण त्रिभुज

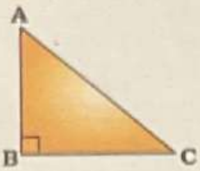
भुजा के आधार पर
- विषमबाहु त्रिभुज
- समद्विबाहु त्रिभुज
- समबाहु त्रिभुज

कोण के आधार पर त्रिभुज

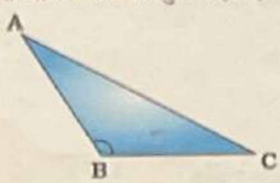
न्यूनकोण त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसका प्रत्येक कोण 90° कम हो तो उसे न्यून कोण कहते हैं।



समकोण त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण 90° हो उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं।

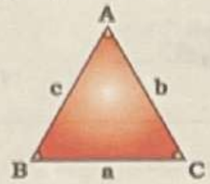


अधिक कोण त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण 90° से अधिक हो उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।

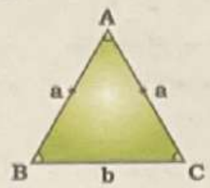


भुजा के आधार पर त्रिभुज

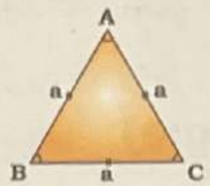
विषमबाहु त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ अलग-अलग हो उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं।



समद्विबाहु त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसकी दो भुजा बराबर हों उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।



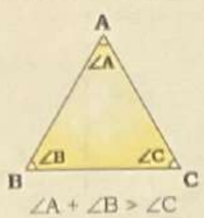
समबाहु त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हो उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं।



कोण और भुजा के अनुपात के आधार पर त्रिभुज की पहचान

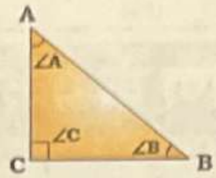
कोण के अनुपात के आधार पर

त्रिभुज के दो कोणों के अनुपात का योग तीसरे कोण से बड़ा हो तो त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।



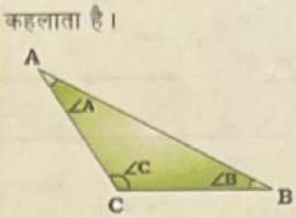
$\angle A + \angle B > \angle C$

यदि दो कोणों के अनुपात का योग तीसरे कोण के बराबर है तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।



$\angle A + \angle B = \angle C$

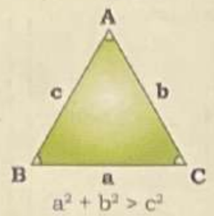
त्रिभुज के दो कोणों के अनुपात का योग तीसरे कोण से कम हो तो त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।



$\angle A + \angle B < \angle C$

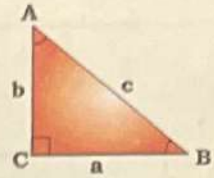
भुजा के अनुपात के आधार पर

त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग सबसे बड़ी भुजा से बड़ी हो तो त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।



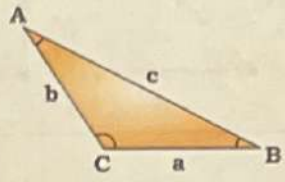
$a^2 + b^2 > c^2$

त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग सबसे बड़ी भुजा के बराबर हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज कहलाता है।



$a^2 + b^2 = c^2$

त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग सबसे बड़ी भुजा से छोटा हो तो त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।



$a^2 + b^2 < c^2$

त्रिभुज की असमानता

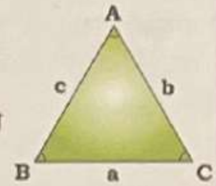
- त्रिभुज का निर्माण तभी संभव है जब दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक हो

  $a + b > c, \; b + c > a, \; c + a > b$

- यदि दो भुजाओं का अंतर तीसरे भुजा से छोटा हो तो त्रिभुज बनेगा।

  $a - b < c, \; b - c < a, \; c - a < b$

  $\therefore |c - a| < b < (c + a)$



- किसी त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा की लंबाई उसके परिमाप के आधे से छोटी होती है।

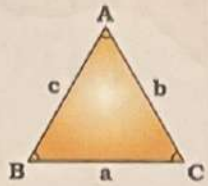
  $c < (a + b)$

  $(c + c) < (a + b + c)$

  $2c <$ परिमाप

  $c < \frac{\text{परिमाप}}{2}$

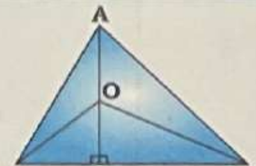
  जहाँ c = बड़ी भुजा की लंबाई है।



किसी त्रिभुज ABC में, $AD \perp BC$,

AD पर कोई बिन्दु O है, तब

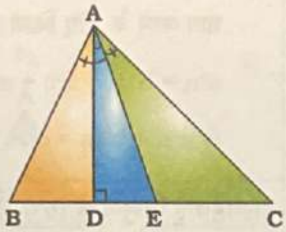
$$AB^2 + OC^2 = AC^2 + OB^2$$



त्रिभुज के कोण समद्विभाजक पर आधारित

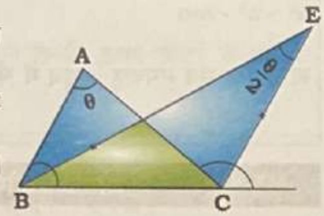
❑ त्रिभुज ABC में, AE ∠BAC का कोण समद्विभाजक है और AD भुजा BC पर खिंचा गया लम्ब है। तो

$$\angle DAE = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$



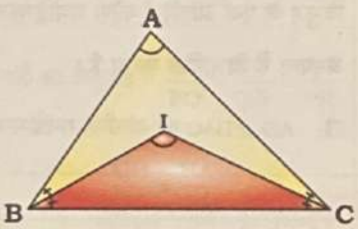
❑ त्रिभुज ABC में, आंतरिक कोण ∠B का कोण समद्विभाजक और बाहरी कोण ∠C का कोण समद्विभाजक E पर मिलते हैं। तो

$$\angle BEC = \frac{1}{2}\angle BAC$$



❑ त्रिभुज ABC में, ∠B और ∠C के समद्विभाजक I पर मिलते हैं। तब,

$$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$$

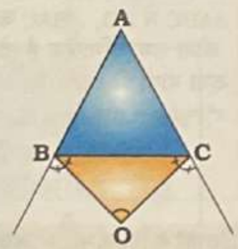


❑ त्रिभुज ABC में बाह्य कोण ∠B और ∠C के समद्विभाजक O पर मिलते हैं।

तब,

$$\angle BOC = 90° - \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle A = 2\,(90° - \angle BOC)$$

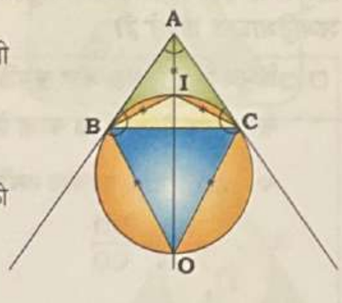


❑ यदि Δ त्रिभुज के दो अन्त: कोण समद्विभाजक और दो वाह्य कोण समद्विभाजक को मिलाने वाले बिन्दु को मिलाने वाली रेखा हमेशा एक सीधी रेखा होगी।

❖ AIO एक सीधी रेखा है और A को दो बराबर भागों में बांटती है।

$$\angle BIC + \angle BOC = 180°$$

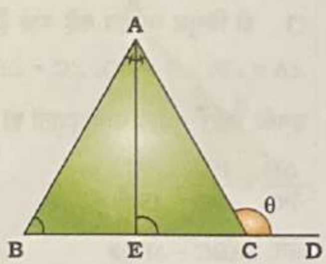
❖ BICO एक चक्रीय चतुर्भुज है।



❑ एक त्रिभुज ABC में, भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है और ∠A का कोण समद्विभाजक BC को E पर मिलता है।

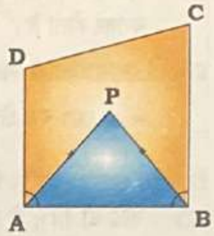
तब

$$\angle ABC + \angle ACD = 2\,\angle AEC$$



❑ किसी भी चतुर्भुज में दो लगातार कोण के समद्विभाजक से बना कोण बाकी दो कोण के योग का आधा होता है।

$$\angle APB = \frac{\angle D + \angle C}{2}$$



❑ समद्विबाहु त्रिभुज में

❖ AB = AC

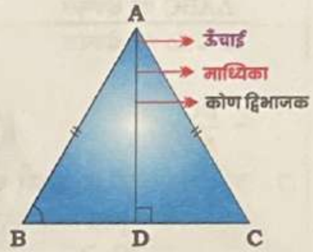
❖ Δ ADB ≅ ΔADC

❖ यदि AD⊥BC ⇒ BD = DC

❖ AD ⇒ BC पर ऊँचाई,

⇒ BC का माध्यिका,

⇒ ∠A का कोण द्विभाजक



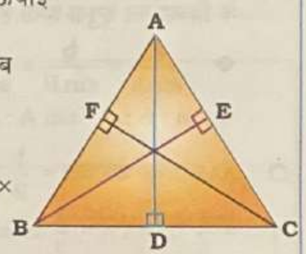
त्रिभुज के क्षेत्रफल का गुण

जब त्रिभुज की ऊँचाई दी गयी हो

❑ ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

❑ यदि हम त्रिभुज की सभी भुजाओं पर लंब खींचते हैं तो

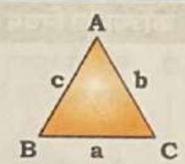
ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times a \times h_1 = \frac{1}{2} \times b \times h_2 = \frac{1}{2} \times c \times h_3$



जब त्रिभुज में ऊँचाई नहीं दी गयी है तब

❑ ΔABC का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

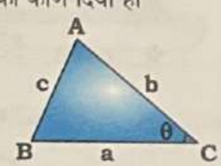
जहाँ, अर्ध-परिमाप (s) = $\frac{a+b+c}{2}$



❑ जब त्रिभुज की दो भुजाएँ ज्ञात हों और उनके बीच का कोण दिया हो

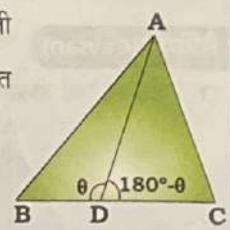
ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ ab sin C

= $\frac{1}{2}$ bc sin A = $\frac{1}{2}$ ca sin B



❑ जब त्रिभुज के एक शीर्ष से सामने वाली भुजा पर एक रेखा खींची जाती है तो वह भुजा को जिस अनुपात में विभाजित करती है क्षेत्रफल को भी उसी अनुपात में विभाजित करेगा।

$$\frac{\Delta ADB \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ADC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2}\times AD\times BD\times \sin\theta}{\frac{1}{2}\times AD\times DC\times \sin(180-\theta)} = \left(\frac{BC}{DC}\right)$$

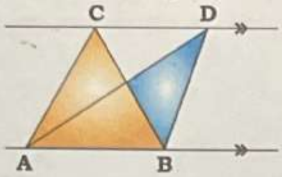


❒ एक ही आधार और दो समांतर रेखाओं के बीच बने सभी त्रिभुज का क्षेत्रफल बराबर होता है।

ΔABC का क्षेत्रफल

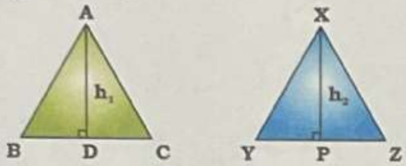
$= \Delta ABD$ का क्षेत्रफल

$AB \parallel CD$



❒ यदि दो त्रिभुजों की ऊँचाई समान है तो उनके क्षेत्रफल का अनुपात उनके आधार के अनुपात के समानुपाती होता है।

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta XYZ \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC}{YZ}$$



❒ यदि दो त्रिभुजों के आधार समान है तो उनके क्षेत्रफल का अनुपात उनकी ऊँचाई के अनुपात के समानुपात होता है।

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{AD}{PT}$$

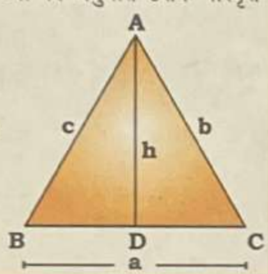
ज्या का नियम (Sine Rule)

❒ एक त्रिभुज के सम्मुख कोण की भुजा और ज्या का अनुपात उसके परिवृत्त के त्रिज्या का दूगुना होता है।

- ❖ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
- ❖ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

❒ ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}ab \sin C$

$= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B$



कोज्या का नियम (Cosine Rule)

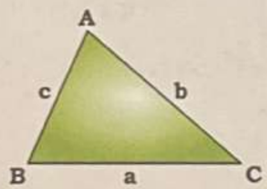
❒ यदि दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया गया है। तो हम तीसरी भुजा ज्ञात करने के लिए कोज्या नियम का प्रयोग करते हैं।

- ❖ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

  $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- ❖ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

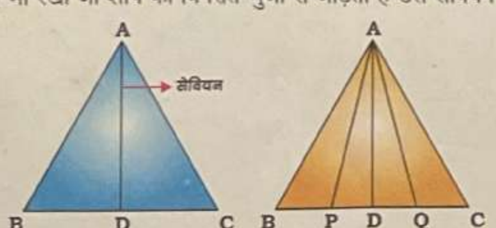
  $\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
- ❖ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

  $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



सेवियन (Cevian)

❒ कोई भी रेखा जो शीर्ष को विपरीत भुजा से जोड़ती है उसे सेवियन कहते हैं।



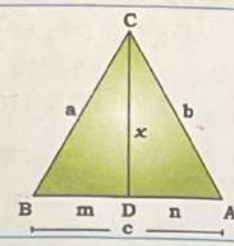
AP, AD, AQ सेवियन हैं।

Stewarts Theorem (स्टीवर्ट प्रमेय)

❒ इसका उपयोग किसी भी सेवियन की लंबाई ज्ञात करने के लिए किया जाता है

$a^2n + b^2m = x^2c + mnc$

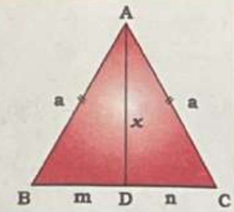
$\Rightarrow a^2n + b^2m = c(x^2 + mn)$



समद्विबाहु त्रिभुज में (a = b)

$x^2 = a^2 - mn$

नोटः यह सूत्र समबाहु त्रिभुज में भी प्रयोग होगा।



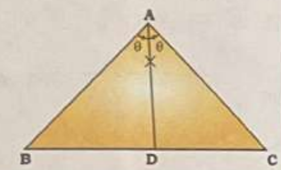
आंतरिक कोण समद्विभाजक प्रमेय

त्रिभुज के आंतरिक कोण को समद्विभाजित करने वाली रेखा को आंतरिक कोण समद्विभाजक कहते हैं।

त्रिभुज के एक आंतरिक कोण समद्विभाजक विपरीत भुजा को अन्य दो भुजाओं के अनुपात में विभाजित करता है।

❒ AD, $\angle BAC$ का आंतरिक समद्विभाजक है।

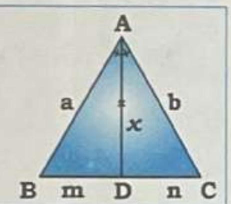
$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



आंतरिक कोण द्विभाजक की लंबाई

ΔABC में AD, $\angle BAC$ का आंतरकि कोण समद्वभिाजक है तो AD की लंबाई क्या होगी।

$x^2 = ab - mn$



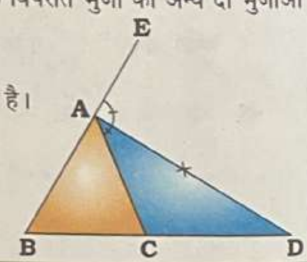
वाह्य कोण समद्विभाजक प्रमेय

त्रिभुज के वाह्य कोण को समद्विभाजित करने वाली रेखा को वाह्य कोण समद्विभाजक कहते हैं।

❒ त्रिभुज के एक वाह्य कोण समद्विभाजक विपरीत भुजा को अन्य दो भुजाओं के अनुपात में विभाजित करता है।

- ❖ AD, $\angle EAC$ का वाह्य समद्विभाजक है।

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



त्रिभुज की समरूपता

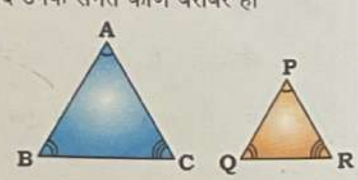
❒ दो त्रिभुज समरूप कहे जाते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हों

$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$

उनकी संगत भुजाएँ सामानुपाती हों

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

अतः $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

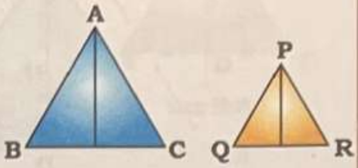


त्रिभुज की समरूपता के गुण

समरूप त्रिभुज में प्रत्येक संगत लंबाई का अनुपात बराबर होता है।

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{P_1}{P_2}=\frac{s_1}{s_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

- h = ऊँचाई/शीर्षलंब, r = अंतः वृत्त की त्रिज्या, R = परिवृत्त की त्रिज्या
- P = परिमाप, s = अर्धपरिमाप, m = माध्यिका



- समरूप त्रिभुज के क्षेत्रफल का अनुपात उनकी संगत लंबाई के वर्ग के अनुपात के बराबर होता है।

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}}=\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2=\left(\frac{BC}{QR}\right)^2=\left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

$$=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2=\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2=\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2$$

- $\sqrt{\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}}}$ = संगत लंबाई का अनुपात = $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}$

त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruency of Triangles)

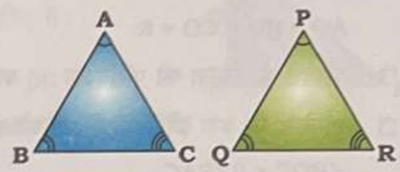
- ***समान आकृति और समान आकार हों तो उसे सर्वांगसम त्रिभुज कहते हैं।***
- ***दो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते हैं। यदि उनकी तीनों संगत भुजाएँ बराबर हों और तीनों संगत कोण बराबर हों।***

सर्वांगसम त्रिभुज के गुण

दो त्रिभुज सर्वांगसम कहे जाते है।

- इसके संगत कोण बराबर हों।

$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$



- इनकी संगत भुजाएँ भी बराबर हों

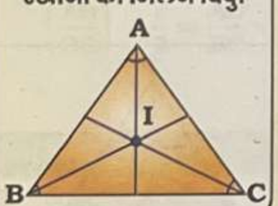
AB = PQ, BC = QR, AC = PR

अतः $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

त्रिभुज के केन्द्र (Centre of Triangles)

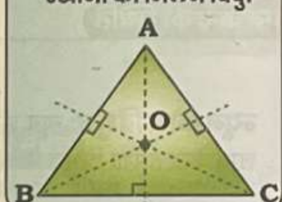
अंतःकेन्द्र (I)

त्रिभुज के आंतरिक कोणों का समद्विभाजक करने वाले रेखाओं का मिलन बिंदु।



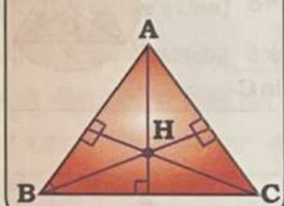
परिकेन्द्र (O)

त्रिभुज की भुजाओं का लम्ब समद्विभाजक करने वाली रेखाओं का मिलन बिंदु।



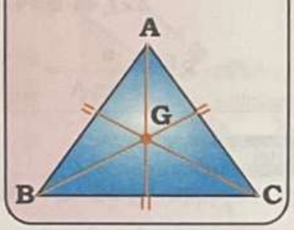
लंब केन्द्र (H)

त्रिभुज की तीन शीर्षलम्बों (ऊँचाई) का मिलन बिंदु।



केन्द्रक (G)

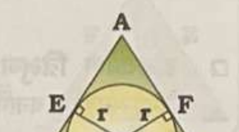
त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ का मिलान बिंदु।



अंतःत्रिज्या

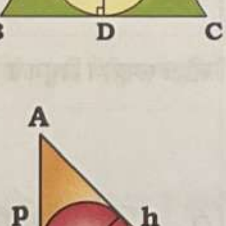
- किसी भी त्रिभुज की अंतःत्रिज्या

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{अर्ध परिमाप}}$$



- समकोण त्रिभुज की अंतः त्रिज्या

$$r=\frac{p+b-h}{2}$$



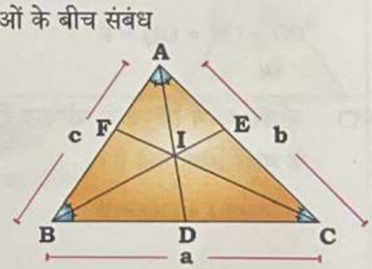
- यदि h_1, h_2 और h_3 किसी त्रिभुज की तीनों ऊँचाइयाँ हैं और अंतःवृत्त त्रिज्या 'r' है, तो

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$$

- त्रिभुज का अंतः केन्द्र से तीनों भुजाओं के बीच संबंध

$$\frac{AI}{ID}=\frac{b+c}{a},\ \frac{BI}{IE}=\frac{a+c}{b},$$

$$\frac{CI}{IF}=\frac{a+b}{c}$$



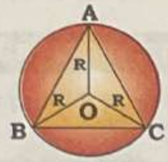
परिकेन्द्र (Circumcentre)

किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लंब समद्विभाजक के मिलान बिन्दु को परिकेन्द्र कहते हैं।

- **परिवृत्तः** त्रिभुज के तीनों शीर्ष से गुजरने वाले वृत्त को परिवृत्त कहते हैं।

परिकेन्द्र के गुण

- परिवृत्त के केन्द्र को परिकेन्द्र (O) कहा जाता है।
- त्रिभुज का परिकेन्द्र त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होता है। तथा दूरी पर त्रिज्या के बराबर होता है।



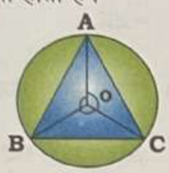
$AO = BO = CO = R$

- परिवृत्त की त्रिज्या को परित्रिज्या (R) कहा जाता है।
- परिकेन्द्र पर बना कोण परिधी पर बने कोण का दो गुना होता है।

$\angle BOC = 2\angle BAC$,

$\angle AOC = 2\angle ABC$,

$\angle AOB = 2\angle ACB$

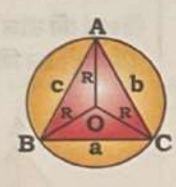


- परिकेन्द्र त्रिभुज के अंदर बाहर या त्रिभुज के किसी भुजा पर स्थित हो सकता है।
- न्यून कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के अंदर होता है।
- अधिक कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर होता है।
- समकोण त्रिभुज में कर्ण के मध्य बिन्दु पर स्थित होता है।

परित्रिज्या

- किसी भी त्रिभुज की परित्रिज्या

$$R = \frac{\text{तीनों भुजाओं का गुणनफल}}{4\times\Delta \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{abc}{4\Delta}$$

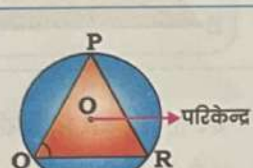


❖ $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$

परिकेन्द्र की स्थिति

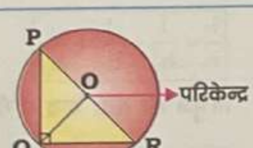
- न्यूनकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के अंदर होता है।

$PO = RO = QO = R$



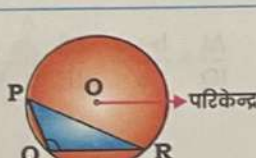
- समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र कर्ण के मध्य बिन्दु पर होता है।

$PO = OR = OQ = R$



- अधिक कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर स्थित होते हैं।

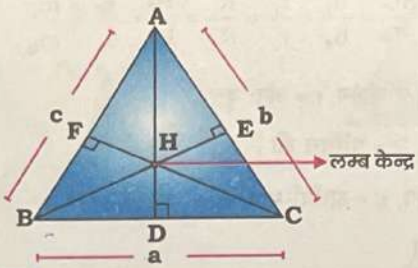
$PO = OR = OQ = R$



- किसी भी प्रकार के त्रिभुज के अंतःकेन्द्र और परिकेन्द्र के बीच की दूरी (d) $= \sqrt{R^2 - 2Rr}$ जहाँ, R = परित्रिज्या, r = अंतःत्रिज्या

लम्ब केन्द्र (Orthocentre)

त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्बों के परिच्छेदन बिन्दु को लम्ब केन्द्र कहते हैं।



लम्ब केन्द्र के गुण

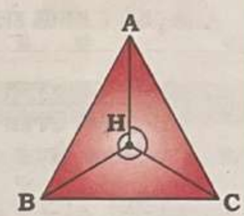
- यदि ΔABC में H लम्ब केन्द्र है तो

लम्ब केन्द्र पर बना कोण

❖ $\angle BHC = 180 - \angle A$

❖ $\angle AHC = 180 - \angle C$

❖ $\angle AHC = 180 - \angle B$

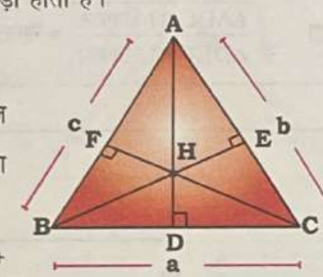


- त्रिभुज के भुजा की लंबाई ऊँचाई से बड़ी होती है।

$AB > AD, BC > BE, AC > CF$

- त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग त्रिभुज की तीनों ऊँचाइयों के योग से बड़ा होता है।

$(AB + BC + AC) > (AD + BE + CF)$

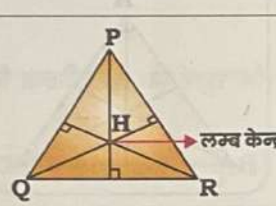


- त्रिभुज की ऊँचाई और भुजा के बीच संबंध।

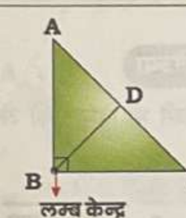
$a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3}$ या $h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$

लम्ब केन्द्र की स्थिति

- **न्यून कोण त्रिभुजः** न्यून कोण त्रिभुज में लम्ब केन्द्र हमेशा त्रिभुज के अंदर होता है।

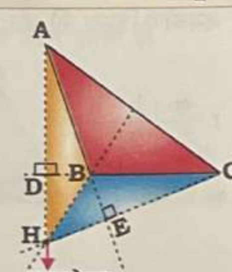


- **समकोण त्रिभुजः** समकोण में लम्ब केन्द्र समकोण बनाने वाले शीर्ष पर होता है।



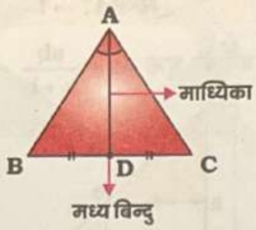
नोटः समकोण त्रिभुज के लम्बकेन्द्र और परिकेन्द्र के बीच की दूरी $= \frac{\text{कर्ण}}{2} = \frac{h}{2}$

- **अधिक कोण त्रिभुजः** अधिक कोण त्रिभुज में लम्ब केन्द्र, त्रिभुज के बाहर और अधिक कोण के पीछे होगा।

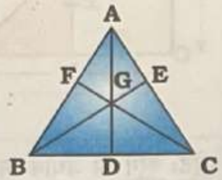


केन्द्रक (Centroid)

- **माध्यिकाः** किसी त्रिभुज के शीर्ष से उसके सामने वाली भुजा के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को माध्यिका कहते हैं।
  - ❖ माध्यिका त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफल में विभाजित करती है।



- **केन्द्रकः** त्रिभुज की तीनों माध्यिकाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु को केन्द्रक कहते हैं। इसे G से प्रदर्शित करते हैं।



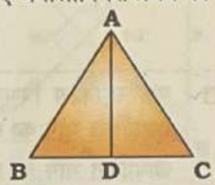
जहाँ AD, DE तथा CF त्रिभुज की माध्यिकायें तथा G केन्द्रक हैं।

अपोलोनियस प्रमेय

- त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात करने के लिए अपोलोनियस प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

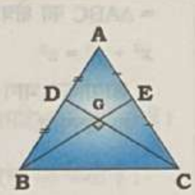
$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

या $AB^2 + AC^2 = 2\left(AD^2 + \frac{BC^2}{4}\right)$



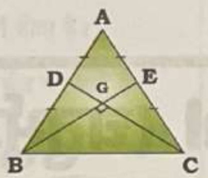
- यदि दो माध्यिकाएँ एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेदित करें तो

$AB^2 + AC^2 = 5BC^2$



- यदि समद्विबाहु त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ एक दूसरे को समकोण को प्रतिच्छेदित करती हैं तो

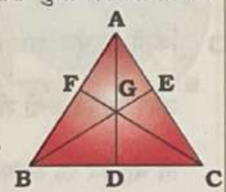
$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$



त्रिभुज की भुजाओं और माध्यिका के बीच संबंध

- त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा पर खींची गयी माध्यिका के दुगने से अधिक होता है।

$AB + AC > 2AD$



- त्रिभुज का परिमाप (भुजाओं का योगफल), माध्यिकाओं के योगफल से हमेशा बड़ा होता है।

$(AB + BC + CA) > (AD + BE + CF)$

- एक त्रिभुज की तीनों माध्यिकाओं के योग का चार गुना त्रिभुज के तीनों भुजाओं के योग के तीन गुने से अधिक होता है।

$3(AB + BC + CA) < 4(AD + BE + CF)$

- एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं के वर्गों के योग का तीन गुना, त्रिभुज के तीनों माध्यिकाओं के वर्गों के योग के तीन गुने के बराबर होता है।

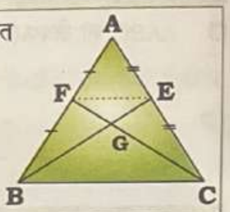
$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

या $\frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 < \frac{AB + BC + CA}{AD + BE + CF} < \frac{4}{3}$

माध्यिकाओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल

यदि दो माध्यिकाएँ एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेदित करती है और माध्यिकाओं की लम्बाई दिया हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{2}{3} m_1 \times m_2$

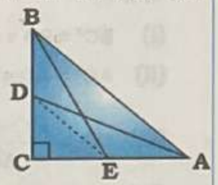


समकोण त्रिभुज में केन्द्रक के गुण

- एक समकोण त्रिभुज में दोनो माध्यिकाओं के वर्गों का योग तथा दोनो माध्यिकाओं को मिलाने वाली रेखा का वर्ग और कर्ण के वर्ग का योग बराबर होता है।

$AD^2 + BE^2 = DE^2 + AB^2$

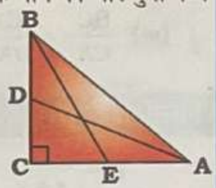
नोटः यदि D, E मध्य बिन्दु है AD और BE माध्यिका है तो $DE = \frac{AB}{2}$



- एक समकोण त्रिभुज में दोनो माध्यिकाओं के वर्गों के योग का चार गुना कर्ण के वर्ग के पाँच गुने के बराबर है।

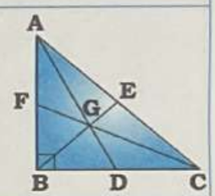
$4(AD^2 + BE^2) = 5AB^2$

❖ $AD^2 + BE^2 = 5R^2$ $(AB = 2R)$



- एक समकोण त्रिभुज ABC में AD, BE और CF तीन माध्यिकाएँ हैं तब,

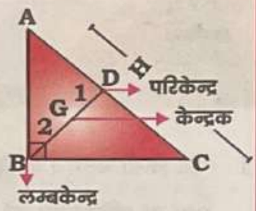
$AG^2 + CG^2 = 5BG^2 \left(BE = R = \frac{AC}{2}\right)$

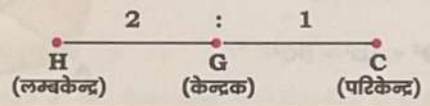


समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र और केन्द्रक के बीच संबंध

यूलर रेखा (Euler's Line)

किसी भी त्रिभुज में लम्बकेन्द्र, केन्द्रक और परिकेन्द्र एक ही सीधी रेखा पर स्थित होते हैं तो उसे यूलर रेखा कहते हैं और केन्द्रक इस रेखा को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

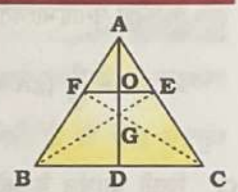




माध्यिकाओं से बने त्रिभुज

- यदि O, माध्यिका AD का मध्य बिन्दु हो -

AO : OG : GD = 3 : 1 : 2



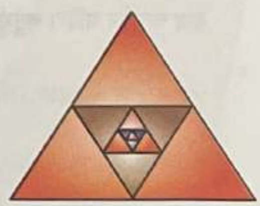
मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बना त्रिभुज

- अनंत तक बने त्रिभुज के क्षेत्रफल का योग

$= \frac{4}{3}$ मूल त्रिभुज का क्षेत्रफल

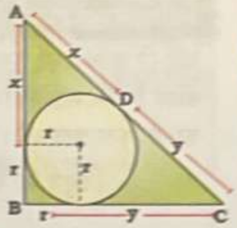
- अनंत तक बने त्रिभुज के परिमाप का योग

$= \frac{1}{2}$ मूल त्रिभुज का परिमाप



समकोण त्रिभुज (Right Angle Triangle)

- ΔABC का क्षेत्रफल = $x \times y$



समकोण बनाने वाले शीर्ष से कर्ण पर लंब खींचा जाए

- समकोण त्रिभुज ABC में, यदि समकोण शीर्ष से कर्ण पर एक लंब CD खींचा जाता है,

(i) $BC^2 = BD \times BA$

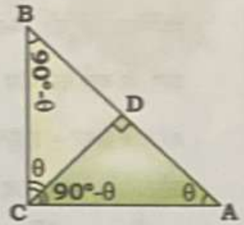
(ii) $AC^2 = AD \times AB$

(iii) $CD = \frac{BC \times AC}{AB}$

(iv) $CD^2 = BD \times AD$

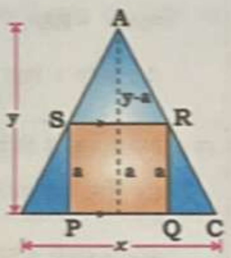
(v) $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AC^2}$

(vi) $\frac{BC^2}{CA^2} = \frac{BD}{DA}$



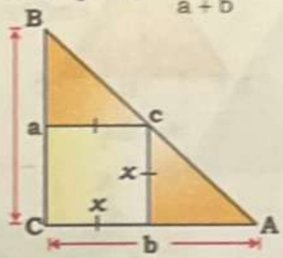
किसी भी त्रिभुज में वर्ग की भुजा

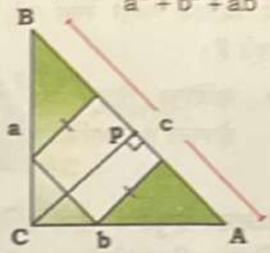
$$a = \frac{xy}{x+y}$$



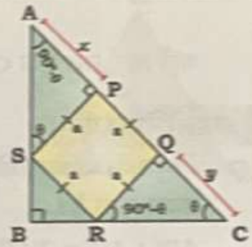
- समकोण त्रिभुज के अंदर अधिकतम आकार का वर्ग

स्थिति : → 1	स्थिति : → 2
वर्ग की भुजा $(x) = \frac{ab}{a+b}$	वर्ग की भुजा $(y) = \frac{abc}{a^2+b^2+ab}$, $x > y$



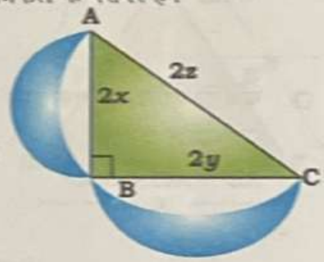


नोटः वर्ग का अधिकतम आकार स्थिति 1 होगा।
वर्ग की भुजा (a) = $\sqrt{xy}$



- एक समकोण त्रिभुज की तीनों भुजाओं पर तीन अर्द्धवृत्त खींचा जाए तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर है।

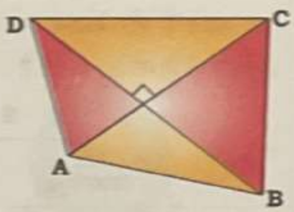
छायांकित भाग का क्षेत्रफल
= ΔABC का क्षेत्रफल
$x^2 + y^2 = z^2$
$\therefore$ छायांकित भाग का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल



Quadrilateral (चतुर्भुज)

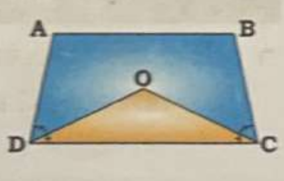
- यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को $90°$ पर प्रतिच्छेदित करें

$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$



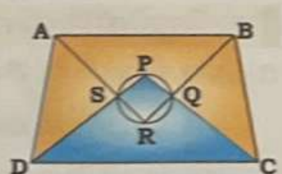
- यदि DO तथा CO क्रमशः $\angle D$ तथा $\angle C$ के कोण समद्विभाजित हैं तब

$\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$



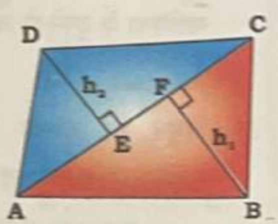
- किसी चतुर्भुज के कोण समद्विभाजक द्वारा बना चतुर्भुज चक्रिय चतुर्भुज होता है।

$\angle P + \angle R = 180°$, और $\angle S + \angle Q = 180°$



चतुर्भुज का क्षेत्रफल और परिमाप

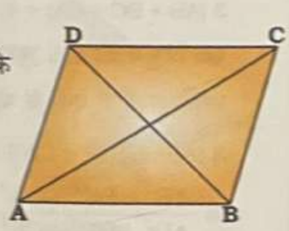
- किसी चतुर्भुज ABCD की एक विकर्ण पर उसके सामने के दो शीर्ष से डाले गए लम्ब हैं तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



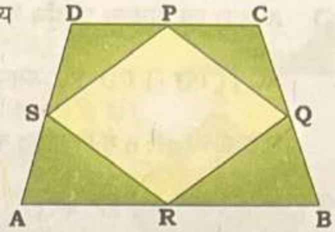
क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times AC \times (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \times$ विकर्ण × (विकर्ण पर डाले गये लम्बों का योग)

- किसी चतुर्भुज का परिमाप उसके विकर्णों के योग से बड़ा होता है।

$(AB + BC + CD + DA) > (AC + BD)$



- यदि एक चतुर्भुज ABCD है इसके मध्य बिन्दु P, Q, R तथा S को मिलाकर एक नया चतुर्भुज बनाया जाता है।



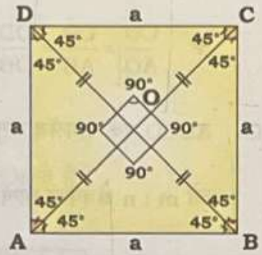
तो,

वह चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होगा।

$$PQRS \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{\square ABCD \text{ का क्षेत्रफल}}{2}$$

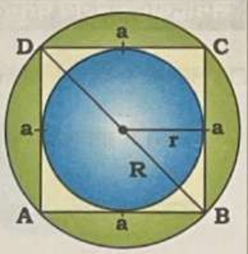
वर्ग (Square)

वर्ग वह चतुर्भुज है जिसकी चारों भुजायें बराबर होती हैं तथा प्रत्येक कोण 90° (समकोण) होता है।



वर्ग के गुण

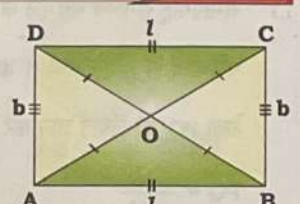
- सभी भुजाएँ बराबर और समानांतर होती हैं।
- प्रत्येक कोण समकोण होता है।
- विकर्ण बराबर होते हैं और एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
- वर्ग के विकर्ण वर्ग के क्षेत्रफल को दो बराबर भाग में विभाजित करते हैं।
- वर्ग के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर बनी आकृति वर्ग होता है।
- प्रत्येक वर्ग एक समचतुर्भुज है लेकिन प्रत्येक समचतुर्भुज वर्ग नहीं है।
- परिमाप = 4a
- विकर्ण की लंबाई (AC = BD = 'd') = $\sqrt{2}a$
- क्षेत्रफल भुजा = $a^2 = \frac{d^2}{2}$
- अंतः वृत्त की त्रिज्या $r = \frac{a}{2}$
- परिवृत्त की त्रिज्या $R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$
- अंतः वृत्त और परिवृत्त की त्रिज्या का अनुपात $(r : R) = 1 : \sqrt{2}$
- अंतः वृत्त और परिवृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात $(r^2 : R^2) = 1 : 2$



आयत (Rectangle)

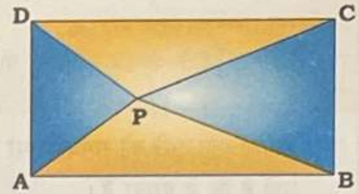
जिस चतुर्भुज के चारों कोण समकोण हो तथा जिसकी आमने-सामने की भुजायें बराबर और सामानांतर हों उसे आयत कहते हैं।

जहाँ, l = लंबाई, b = चौड़ाई

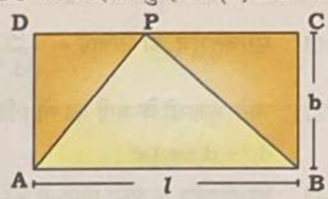


आयत के गुण

- विपरीत भुजाएँ समानांतर एवं बराबर होती हैं।
- दोनों विकर्ण बराबर होते हैं और एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं लेकिन समकोण नहीं बनाते हैं।
- विकर्ण कोण को समद्विभाजित नहीं करते हैं।
- परिमाप = $2(l + b)$
- क्षेत्रफल = $l \times b$
- विकर्ण = $(AC = BD) = \sqrt{l^2 + b^2}$
- यदि आयत या वर्ग के अंदर कोई बिन्दु हो तब $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

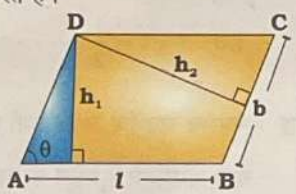


- ABCD एक आयत में यदि P भुजा DC पर कोई बिन्दु है तो (P, DC का मध्य बिन्दु नहीं है।)
ΔAPB का क्षेत्रफल
$$= \frac{\square ABCD \text{ का क्षेत्रफल}}{2}$$



नोटः यह परिणाम समचतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज और वर्ग के लिए सत्य है।

- सम्मुख भुजाएँ समान और समांतर होती हैं।
- सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
- किन्ही दो आसन्न कोण को योग 180 होता है।
- विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
- विकर्णों की लंबाई बराबर नहीं होती है।
- विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित नहीं करते हैं।
- परिमाप = $2(l + b)$
- क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई
  - ❖ $= l \times h_1 = b \times h_2$
  - ❖ $= AD \times AB \sin\theta$
- चारों भुजाओं के वर्गों का योग = विकर्णों के वर्गों का योग $\Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 2(l^2 + b^2)$
- कोण का अनुपात = ∠A : ∠B : ∠C : ∠D = a : b : a : b
- विकर्ण चतुर्भुज को चार बराबर क्षेत्रफल में विभाजित करते हैं।



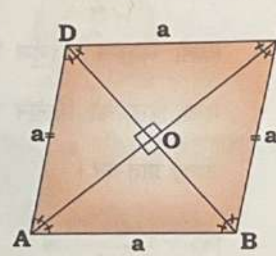
समचतुर्भुज (Rhombus)

एक चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों और इनके विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करें लेकिन प्रत्येक कोण समकोण नहीं हो तो ऐसा चतुर्भुज समचतुर्भुज कहलाता है।

विकर्ण (AC) = d_1,

विकर्ण (BD) = d_2

समचतुर्भुज की भुजा = a

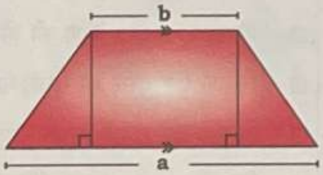


समचतुर्भुज के गुण

- विपरीत भुजाएँ समांतर एवं बराबर होती हैं।
- विपरीत कोण बराबर होते हैं।
  $\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$
- समचतुर्भुज के आसन्न कोण का योग 180° होता है।
  $\angle A + \angle B = 180°$
- विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। लेकिन आवश्यक नहीं है कि वे बराबर हैं।
- एक समचतुर्भुज एक वर्ग हो सकता है और नहीं भी लेकिन सभी वर्ग समचतुर्भज होते हैं।
- परिमाप = 4a
- क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 = a^2 \sin\theta$
- समचतुर्भुज की ऊँचाई = $\frac{d_1 \times d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$
- चारों भुजाओं के वर्गों का योग विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।
  $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$
- समचतुर्भुज के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर बनी आकृति आयत कहलाती है।

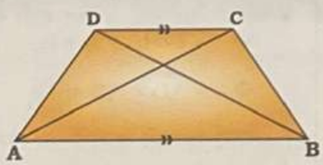
समलंब चतुर्भुज (Trapezium)

- समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल



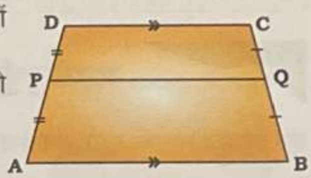
$= \frac{1}{2} \times$ समानांतर भुजाओं का योग × समानांतर भुजाओं के बीच की दूरी $= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

- समलंब चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग असमांतर भुजाओं के वर्गों का योग तथा समांतर भुजा के गुणनफल के दोगुने के योग के बराबर होता है।



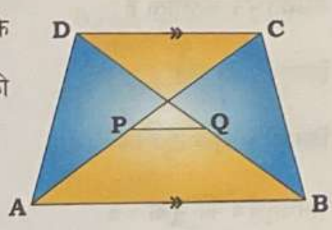
$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2\ AB \times CD$

- किसी समलंब चतुर्भुज के असमांतर भुजाओं के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा की लंबाई ज्ञात करें।



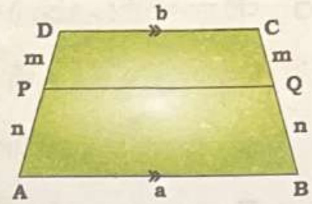
$PQ = \frac{(AB + DC)}{2}$

- किसी समलंब चतुर्भुज के विकर्णों के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा की लंबाई ज्ञात करें।



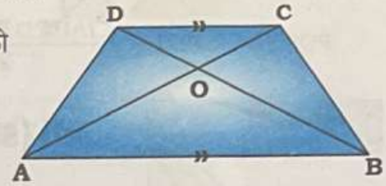
$PQ = \frac{(AB - DC)}{2}$

- ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें AC || PQ || CD, PQ असमांतर भुजाओं को m : n मे विभाजित करती है तो PQ की लंबाई ज्ञात करें।



$PQ = \frac{ma + nb}{m + n}$

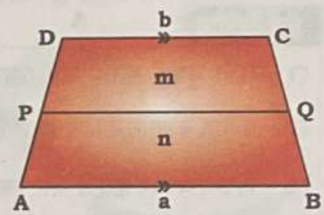
- ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC और BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेदित करते हैं।



❖ $\Delta COD \sim \Delta AOB$

❖ $\frac{CO}{AO} = \frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OB}$

- ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें PQ वह रेखा है जो समलम्ब चतुर्भुज को m : n क्षेत्रफल वाले दो चतुर्भज में विभाजित करती है तो



❖ $PQ = \sqrt{\frac{ma^2 + nb^2}{m + n}}$

❖ यदि m = n है तो PQ

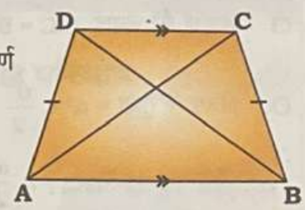
$= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

❖ AB || PQ || CD है तो

$\frac{\square PQCD \text{ का क्षेत्रफल}}{\square PQBA \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{m}{n}$

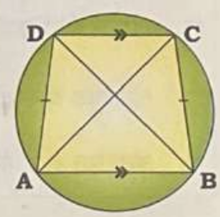
समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज के गुण

- प्रत्येक समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज के विकर्ण आपस में बराबर होते हैं।



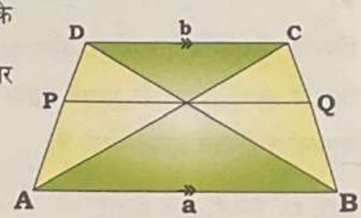
विकर्ण ⇒ AC = BD

- प्रत्येक समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज एक चक्रिय चुर्तुभुज होता है।



❖ यदि एक समलंब चतुर्भुज वृत्त में बना हुआ है। तो वह समलंब चतुर्भुज होगा।

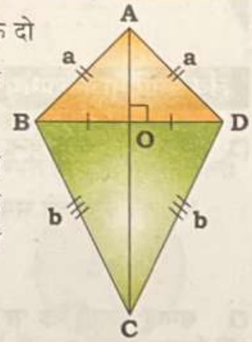
- समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज के विकर्णों के परिच्छेद से होकर गुजरने वाले समांतर रेखा PQ की लंबाई ज्ञात करें।



$PQ = \frac{2ab}{a + b}$

पतंग (Kite)

- वह चतुर्भुज जिसमें आपस में जुड़ी हुई भुजाओं के दो अलग-अलग युग्म बराबर होते हैं, उसे पतंग कहते है।
- पतंग के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं तथा एक विकर्ण दूसरे विकर्ण को समद्विभाजित करता है। इसके असमान भुजाओं के बीच बने सम्मुख कोण बराबर होते हैं।



पतंग के गुण

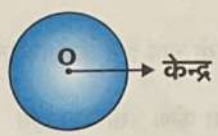
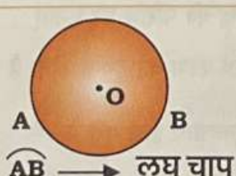
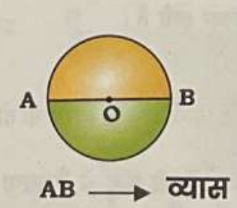
- $AB = AD = a$
  $BC = CD = b$
- $\angle B = \angle D, (\angle A \neq \angle C)$
- परिमाप $= 2(a + b)$
- क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
- विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेदित करते हैं।
  $AC \perp BD$
- बड़ा विकर्ण छोटे विकर्ण को समद्विभाजित करता है।
  $BO = OD$
- विकर्ण अपने कोण को दो बराबर भागों में बाँटते हैं।
  $\angle BAC = \angle DAC$ और $\angle BCA = \angle DCA$

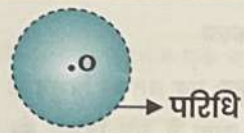
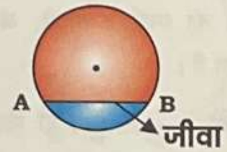
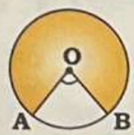
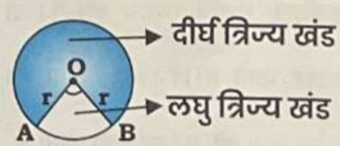
चतुर्भुज के मध्य बिंदुओं से बनी आकृति

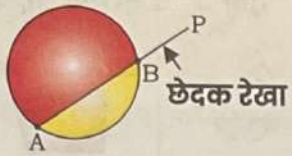
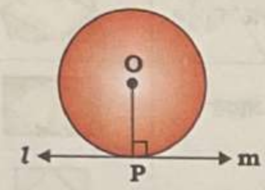
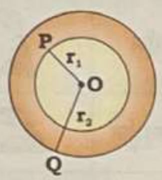
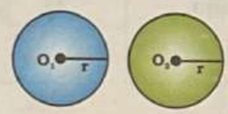
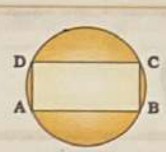
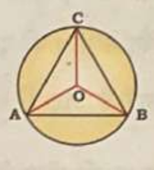
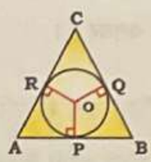
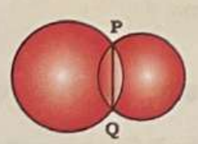
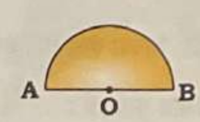
नाम	दी गयी आकृति	भुजाओं के क्रमागत मध्य बिन्दुओं से बनी आकृति
चतुर्भुज		समांतर चतुर्भुज
समांतर चतुर्भुज		समांतर चतुर्भुज
आयत		समचतुर्भुज
वर्ग		वर्ग
समचतुर्भुज		आयत
समलंब चतुर्भुज		समांतर चतुर्भुज
पतंग		आयत

Circle (वृत्त)

महत्वपूर्ण परिभाषा

परिभाषा	चित्र
वृत्तः किसी एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ वृत्त कहलाता है। यह निश्चित बिंदु वृत्त का केंद्र कहलाता है।	
चापः किसी वृत्त का एक सतत टुकड़ा वृत्त का चाप कहलाता है।	
व्यासः वृत्त के केंद्र से गुजरने वाली जीवा व्यास कहलाती है। व्यास एक रेखा खंड है जो केंद्र से होकर गुजरता है और इसके अंतिम बिंदु एक वृत्त की परिधि पर होते हैं। वृत्त की सबसे लंबी जीवा को व्यास कहा जाता है।	

त्रिज्याः केंद्र और वृत की परिधि के किसी भी बिंदु के बीच की दूरी वृत की त्रिज्या कहलाती है। वृत्त की त्रिज्या = r	
परिधिः यह वृत्त की सीमा की लंबाई है जो $2\pi r$ के बराबर है।	
जीवाः जो रेखा वृत्त की परिधि को दो बिंदुओं पर स्पर्श करती है। बड़ी जीवा केंद्र के पास होती है।	
केंद्रीय कोणः वृत्त के केंद्र पर बनने वाला कोण केंद्रीय कोण कहलाता है।	
त्रिज्य खंडः त्रिज्या द्वारा घिरे हुए भाग को त्रिज्य खंड कहते हैं।	

वृत्त खंडः जीवा द्वारा विभाजित किए गए भाग को वृत्त खंड कहते हैं।	
छेदक रेखाः एक सीधी रेखा जो एक वृत्त को दो बिंदुओं पर काटती है, वृत्त की छेदक रेखा कहलाती है।	
स्पर्श रेखाः एक रेखा जो वृत्त को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करती है, वृत्त की स्पर्श रेखा कहलाती है। ∠OPQ = 90° (PQ यदि वृत्त की स्पर्श रेखा हैं तो OP ⊥ *l* m)	
संकेन्द्री वृत्तः जब एक समतल पर समान केंद्र वाले दो वृत्त होते है, तो संकेंद्रित वृत कहलाते हैं यहाँ, उभयनिष्ठ केंद्रओ O और त्रिज्या r और R वाले दो वृत्त संकेंद्रित वृत है।	
सर्वांगसम वृत्तः जब दो अलग-अलग वृत्तों की त्रिज्या समान होती है तो उन्हें सर्वांगसम वृत्त कहा जाता है।	
चक्रीय चतुर्भुजः एक चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष वृत्त पर स्थित हों ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है	
परिवृत्तः वह वृत्त जो किसी त्रिभुज के चारों ओर परिचालित होता है/हैं। एक परिवृत्त त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता	
अंतःवृत्तः एक वृत्त जो त्रिभुज के अंदर खींचा जाता है और त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है, अंतःवृत्त कहलाता है।	
उभयनिष्ठ जीवाः जब दो दिए गए वृत्तों के प्रतिच्छेदन बिंदु को मिलाया जाता है, तो इसे दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा कहा जाता है।	
अर्धवृत्तः वृत्त का व्यास वृत्त को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रत्येक भाग को अर्धवृत्त कहा जाता है	

जीवा और चाप के मूलभूत गुण का महत्वपूर्ण परिणाम

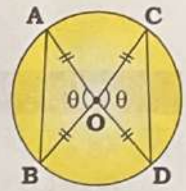
लंब समद्विभाजक प्रमेय

- किसी भी वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाले गए लंब जीवा को समद्विभाजित करते हैं।

- समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती हैं।

  यदि AB = CD तब ∠AOB = ∠COD

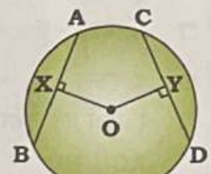
  या यदि ∠AOB = ∠COD तब AB = CD



- यदि दो जीवाएँ वृत्त के केंद्र से समान दूरी पर हैं, तो दो जीवाएँ बराबर होंगी।

  यदि AB = CD, OX ⊥AB और OY ⊥ CD,

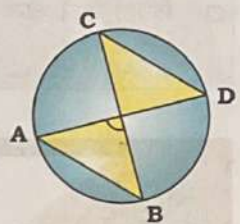
  तब OX = OY



- यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों तो उनके संगत चाप भी बराबर होते हैं।

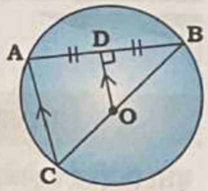
  Arc (AB) = Arc (CD)

  ∴ AB = CD

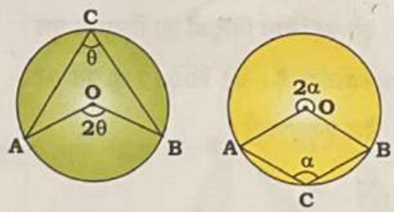


- यदि किसी वृत्त में, OD जीवा AB पर लंबवत है, O वृत्त का केंद्र है और BC व्यास है।

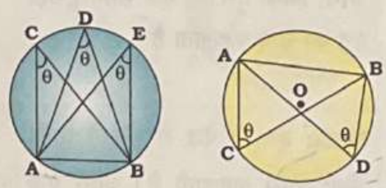
  तब $\frac{CA}{OD} = \frac{2}{1}$



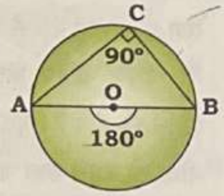
- किसी चाप द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण उसी चाप द्वारा केंद्र की परिधि पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।



- एक चाप द्वारा वृत्त के एक ही ओर बने कोण बराबर होते हैं।

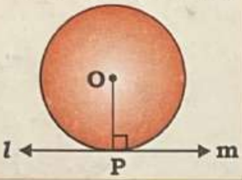


- यदि किसी वृत्त के व्यास के दोनों सिरों को अर्धवृत्त पर स्थित किसी बिंदु से मिलाया जाए, तो उस बिंदु पर बना कोण हमेशा 90° होता है।



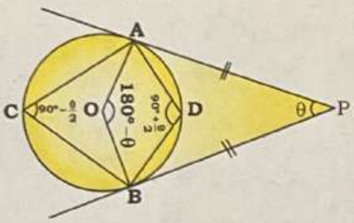
स्पर्श रेखा

- किसी वृत्त पर अनंत स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
- वृत्त के बाहर स्थित एक बिन्दु से अधिकतम दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
- वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।
- वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस स्पर्श बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या के लम्बवत होती है।
- किसी वृत्त की त्रिज्या के अंतिम बिन्दु पर त्रिज्या के लम्बवत खींची गई रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।



जब किसी बाह्य बिंदु P से दो स्पर्शरेखाएँ खींची जाती हैं। तब,

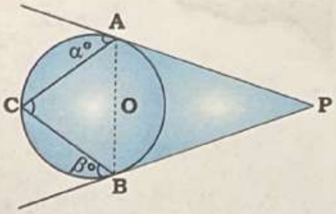
- $\angle ADB = 90° + \frac{\theta}{2}$
- $\angle ADB = 90° - \frac{\theta}{2}$
- $\angle APB = \theta$
- $\angle AOB = 180° - \theta$



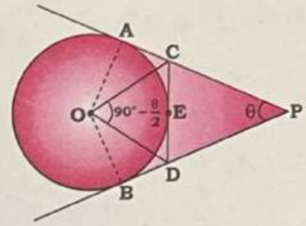
- वृत्त के बाहर एक बिन्दु से खिंची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई बराबर होती है।

- यदि α और β दिया हो तो ∠ACB का मान ज्ञात करें।

  $\angle ACB = 180° - (\alpha + \beta)$

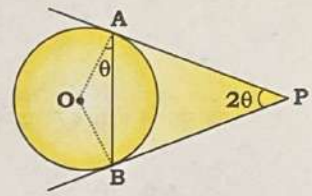


- $\angle COD = 90° - \frac{\theta}{2}$ ∠COD $= \frac{\angle AOB}{2}$

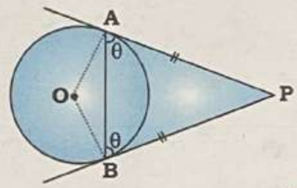


- यदि एक बाहरी बिन्दु P से केन्द्र O वाले एक वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ AP और PB खीची जाती हैं तो

  $\angle APB = 2\angle OAB$



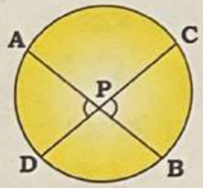
- यदि किसी बाहरी बिन्दु से किसी जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखा जीवा के साथ समानकोण बनाती है तो



स्पर्श रेखा, छेदक रेखा और जीवा के बीच सम्बन्ध

जब दो जीवाएँ वृत्त के अंदर प्रतिच्छेदित करती हैं।

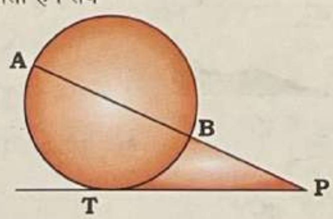
- दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को बिंदु P पर आंतरिक रूप से काटती हैं।



PA × PB = PC × PD

जब एक जीवा और एक स्पर्श रेखा मिलती हैं।

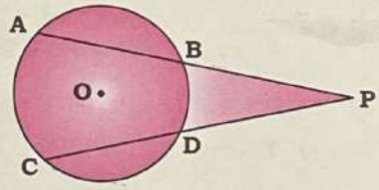
- एक बाहरी बिंदु से एक छेदक और स्पर्शरेखा खींची जाती है। तब



$PT^2 = PB \times PA$

जब दो जीवाएँ वृत्त के बाहर प्रतिच्छेदित करती हैं।

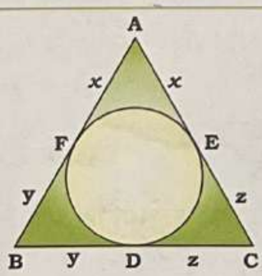
- दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को बाहरी रूप से बिंदु P



PB × PA = PD × PC

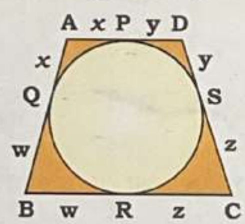
- जब एक वृत्त त्रिभुज के अंदर हो।

  $AB + BC + CA = 2(x + y + z)$



- यदि एक वृत्त एक चतुर्भुज में बना हुआ है या एक चतुर्भुज एक वृत्त के परिगत है।

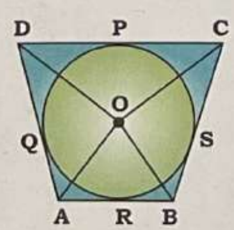
  AB + CD + BC + AD



- यदि एक वृत्त एक चतुर्भुज ABCD की भुजाओं को क्रमशः P, Q, R, S पर स्पर्श करता है तो विपरीत भुजाओं द्वारा केन्द्र पर बने कोण समपूरक होते हैं।

  $\angle AOB + \angle COD = 180°$

  $\angle AOD + \angle BOC = 180°$



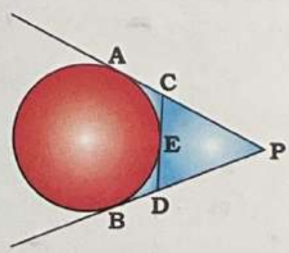
- ΔPCD की परिमाप = 2PA = 2PB

  ⇒ PC + CE+ ED + PD

  ⇒ PC + CA+ BD + PD

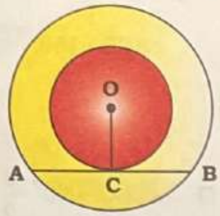
  ⇒ PA + PB

  ⇒ 2PA or 2PB (∴PA = PD)



संकेन्द्री वृत्तों में स्पर्श रेखा

- दो संकेंद्रित वृत्तों में, बड़े वृत्त की एक जीवा जो छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित हो जाती है, अर्थात,

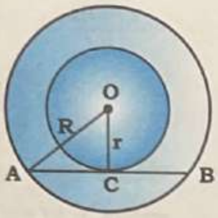


$AP = BP$

यदि वृत्त संकेंद्रित हैं, तो:

- AB की लंबाई = 2 AC

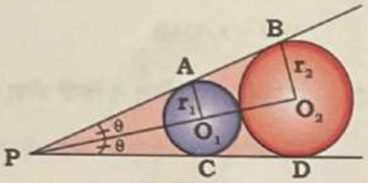
$= 2\sqrt{R^2 - r^2}$



- बाह्य रूप से स्पर्श करने वाले दो वृत्तों की त्रिज्या का अनुपात ज्ञात करना

$O_1 O_2 = r_1 + r_2$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$

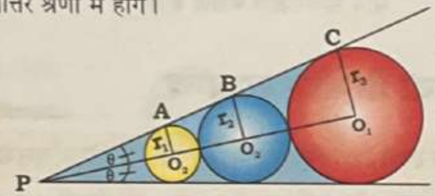


- R_1, R_2, R_3 हमेशा गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

$R_2 = \sqrt{R_1 \times R_3}$

$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_3}$

$\Rightarrow R_2 = \sqrt{R_1 \times R_3}$



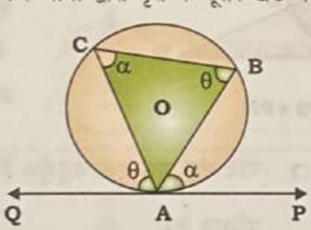
एकांतर वृत्तखंड प्रमेय

- एक जीवा और स्पर्शरेखा द्वारा बनाया कोण जीवा द्वारा वृत्त के दूसरे खंड में बनाए गए कोण के बराबर होता है।

$\angle BAP = \angle BCA = \alpha$

$\angle CAQ = \angle CBA = \theta$

- इसे जीवा स्पर्शरेखा प्रमेय के रूप में भी जाना जाता है।

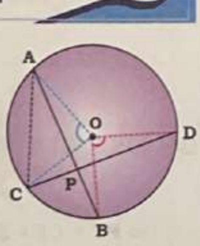


कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

- AB और CD दो जीवाएँ आंतरिक रूप से विंदु P पर काटती हैं, तब

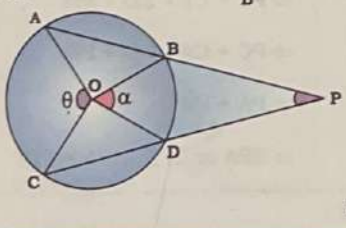
$\angle APD = \angle BPC = \frac{\angle AOD + \angle BOC}{2}$

$\angle APC = \angle 180° - \angle APD = \angle BPD$



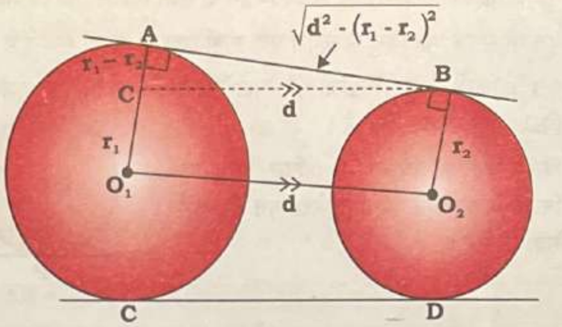
- AB और CD दो जीवाएँ बाह्य विंदु P पर काटती हैं, तब

$\angle APC = \angle BPD = \frac{\theta - \alpha}{2}$



उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की लंबाई

- एक उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा को प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा कहा जाता है यदि दोनों वृत्त इसके एक ही तरफ स्थित हों।



DCT की लंबाई

$BC || O_1O_2$

$DCT = AB = CD = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$

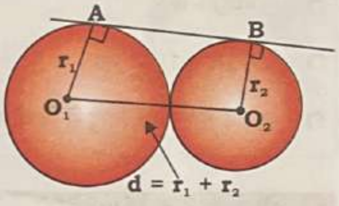
- जब दो वृत्त एक दूसरे को बाहर से स्पर्श करते हैं तो:

$AB = DCT = 2\sqrt{r_1 r_2}$

$AB = DCT$

$= \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}$

$= \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$

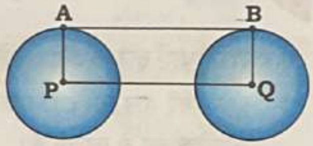


- यदि वृत्तों की त्रिज्या समान हो,

$r_1 = r_2 = r$

सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा, AB

$= PQ$

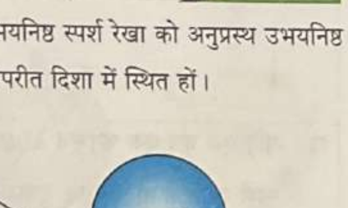


AB = PQ i.e. सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई दोनों वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी के समान होती है।

- सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा, अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा से बड़ी होती है।

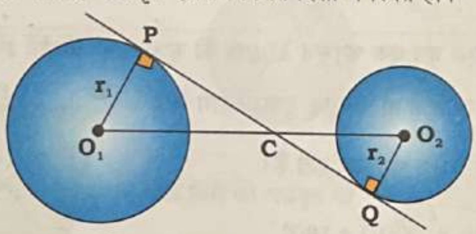
(DCT > TCT)

$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$



त्रिर्यक उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा

अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा: एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा को अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा कहा जाता है यदि वृत्त इसके विपरीत दिशा में स्थित हों।

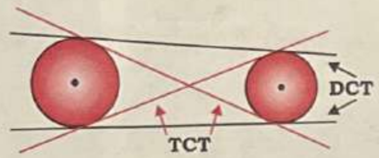


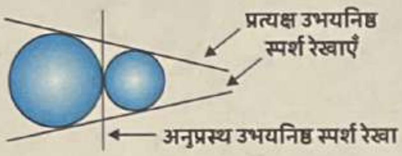
- अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (TCT) की लंबाई

$(PQ) = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$ (यहाँ, $d = O_1O_2$)

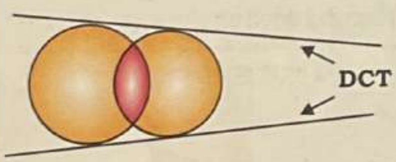
अधिकतम और न्यूनतम उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या

<table>
<tr><th>वृत्त</th><th>अधिकतम</th><th>न्यूनतम</th></tr>
<tr><td>जब दो वृत आपस में स्पर्श नहीं करते तो उनकी अधिकतम 4 स्पर्श रेखाएँ हो सकती है।


</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>जब दो वृत एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते है तो उनकें केंद्रों की बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं का योग होती है।


</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>जब दो वृत एक दूसरे को अंतः स्पर्श करते है तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं का अंतर होती है।

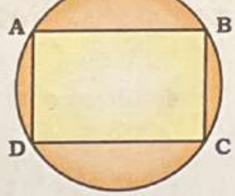
</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>जब दो वृत्त एक-दूसरे को प्रतिछेद करें


</td><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>यदि एक वृत्त दूसरे वृत्त के अंदर बनाया जाता है और वे एक दूसरे को स्पर्श नहीं करते हैं तो कोई उभयनिष्ट स्पर्श रेखा संभव नहीं है।

</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

चक्रीय चतुर्भुज

- यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष किसी वृत्त की परिधि पर होते है तो यह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।



❖ चक्रीय चतुर्भुज के विपरीत कोणों का योग 180° होता है।

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

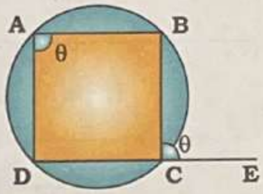
- चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोण अंतः विपरीत कोण के बराबर होता है।

$\angle DAB = \angle BCE$

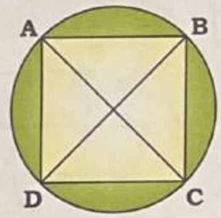
$\angle DAB + \angle BCD = 180°$

$\angle BCD + \angle BCE = 180°$

$\therefore \angle DAB = \angle BCE$



- **टोलमी प्रमेय:** किसी चक्रीय चतुर्भुज में, विपरीत भुजाओं के गुणनफलों का योग चतुर्भुज के विकर्णो के गुणनफल के समान होता है।



$AB \times DC + AD \times BC = AC \times DB$

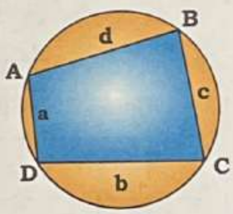
- यदि चक्रिय चतुर्भज का एक विकर्ण दूसरे विकर्ण को समद्विभाजित करता है तो,

$AB \times AD = BC \times CD$

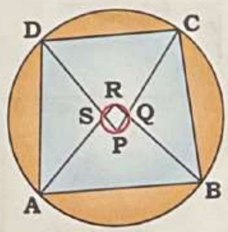
- यदि चक्रिय चतुर्भज की भुजाएँ a, b, c तथा d हो तो चक्रिय चतुर्भज का क्षेत्रफल

- $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

$s = \frac{a+b+c+d}{2}$



- वह चतुर्भज जिसे चक्रिय चतुर्भज के कोण समद्विभाजक से बनाया गया हो तो वह चक्रिय चतुर्भज होगा।



अतः PQRS चक्रिय चतुर्भज होगा।