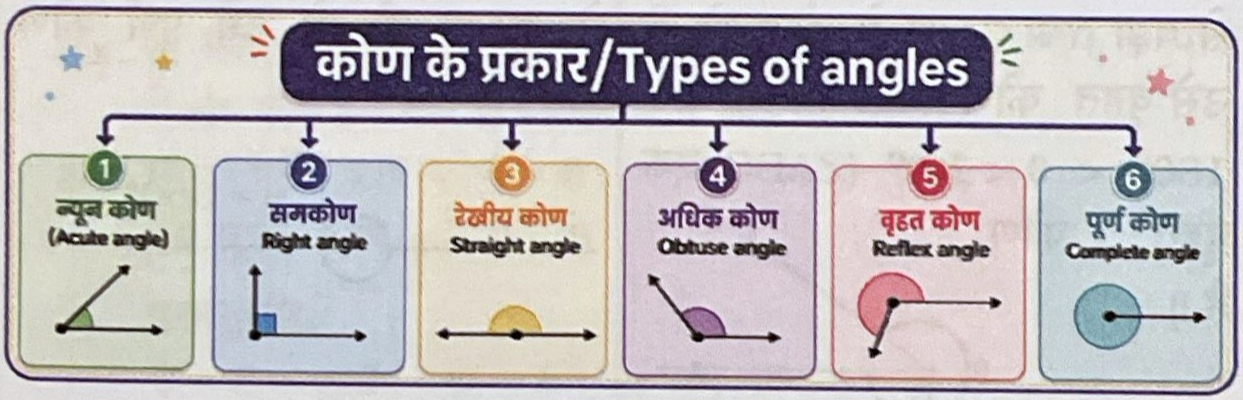
01 Geometry (ज्यामिति)

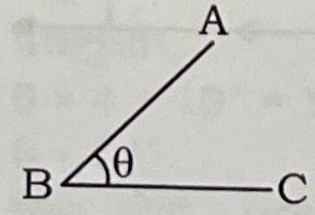
Lines & Angles (रेखाएँ और कोण)

कोणः दो रेखाओं के बीच का झुकाव कोण कहलाता है। एक आकृति जो दो किरणों या रेखाओं से बनती है जो एक सामान्य अंतः बिन्दु साझा करती हैं कोण कहलाता हैं। दो किरणों को एक कोण की भुजा कहा जाता है और उभयनिष्ठ अंतः बिन्दु को शीर्ष कहा जाता है।



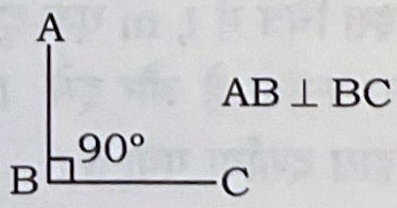
न्यून कोण: यदि कोई कोण 0° से बड़ा तथा 90° से छोटा हो।

$0° < \theta < 90°$ ($\angle ABC$ एक न्यून कोण है।)



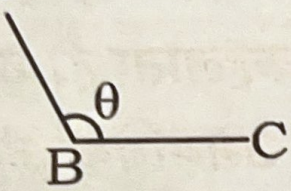
समकोण: यदि कोई कोण 90° के बराबर हो तो उसे समकोण कहते हैं।

$\theta = 90°$ ($\angle ABC$ एक समकोण है।)



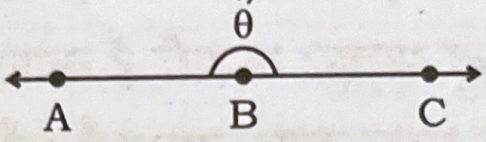
अधिक कोण: यदि कोई कोण 90° से बड़ा तथा 180° से छोटा हो तो उसे अधिक कोण कहते हैं।

$90° < \theta < 180°$ (∠ ABC एक अधिक कोण है)।



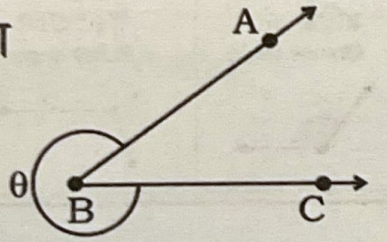
ऋजु कोण/सरल कोण: यदि कोई कोण 180° के बराबर हो तो उसे ऋजु कोण/सीधा कोण कहते हैं।

$\theta = 180°$ (∠ABC एक ऋजु कोण/सीधी कोण है)।

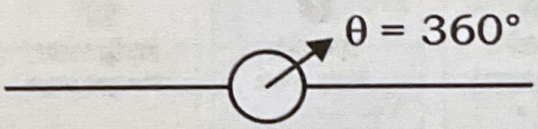


वृहत कोण: यदि कोई कोण 180° से बड़ा तथा 360° से छोटा हो तो उसे वृहत कोण कहते हैं।

$180° < \theta < 360°$ (∠ABC एक वृहत कोण है।)

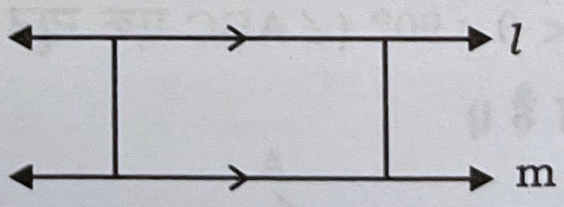


पूर्ण कोण: यदि कोई कोण 360° के बराबर हो तो उसे पूर्ण कोण कहते हैं।

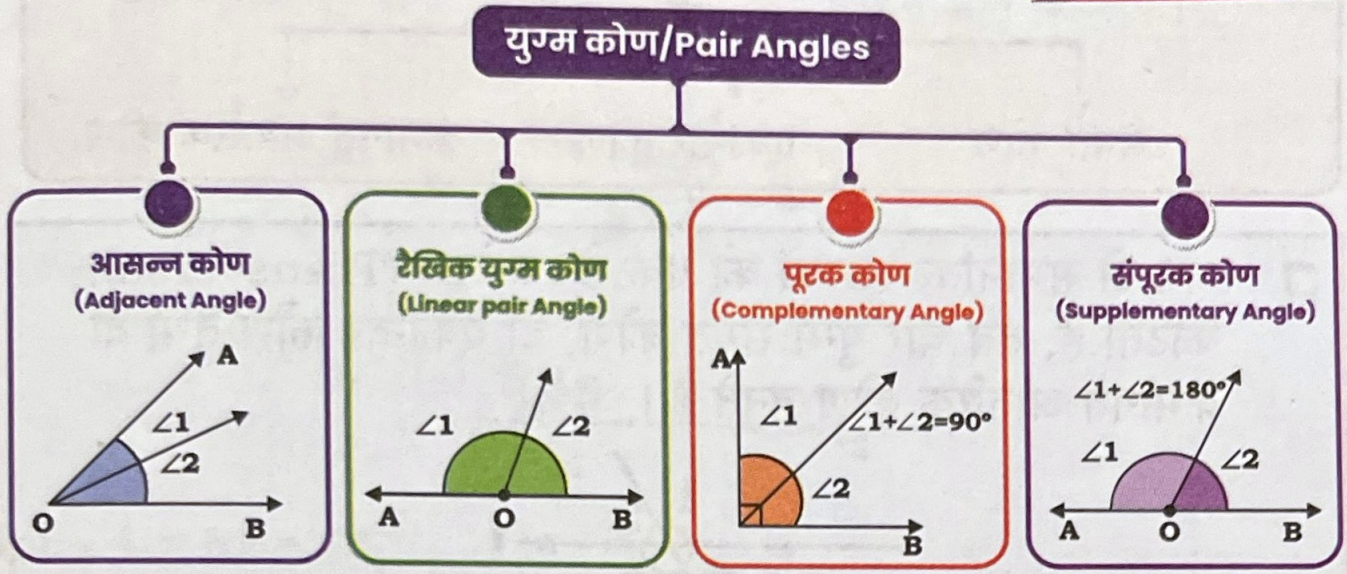


- **समानांतर रेखाएँ:** दो या दो से अधिक रेखाएँ जो आपस में कभी नहीं काटती हैं , तो उन रेखाओं को समानांतर रेखा कहते हैं।

  इस चित्र में l, m एक-दूसरे के समानांतर है और इसे $l \parallel m$ द्वारा दर्शाया गया है।



युग्म कोण (Pair of angles)



Ex. दो कोण परस्पर पूरक हैं। बड़ा कोण, छोटे कोण के माप के पाँच गुने से 6° कम है। बड़े कोण का माप ज्ञात कीजिए।

Sol. मान लें कि बड़ा कोण = θ

तब पूरक कोण = $90° - \theta$

प्रश्नानुसार,

$\theta = 5 \times (90° - \theta) - 6°$

$\theta = 450° - 5\theta - 6°$

$6\theta = 444°$ $\therefore \theta = 74°$

Ex. किसी कोण का संपूरक उस कोण के चार गुने से 10° अधिक है। उस कोण के पूरक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. मान लें कि मूल कोण = θ

संपूरक कोण = $180° - \theta$

प्रश्नानुसार,

$\theta \times 4 + 10° = 180° - \theta$

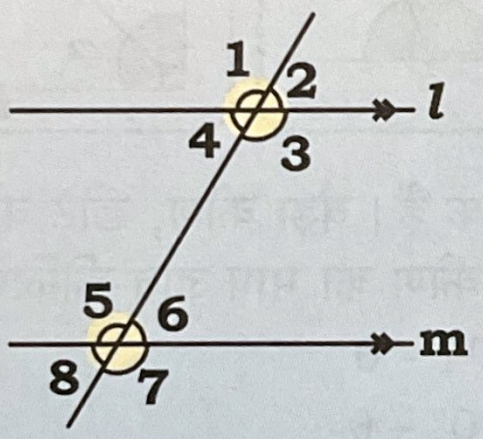
$\theta = 34°$

पूरक कोण = $90° - 34° = 56°$

तिर्यक / छेदी रेखा द्वारा बनाए गए कोण

- संगत कोण
- एकान्तर कोण
- क्रमागत आंतरिक कोण

❐ जब दो समानांतर रेखाओं को एक छेदक रेखा (Transversal) काटती है, तब चार युग्म संगत कोण, दो एकान्तर कोण तथा दो क्रमागत आंतरिक कोण बनते हैं।



- ❖ **संगत कोण:** $\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7, \angle 4 = \angle 8$
- ❖ **एकान्तर अंतः (आंतरिक) कोण:** $\angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5$
- ❖ **बाह्य एकांतर कोणः** $\angle 1 = \angle 7, \angle 2 = \angle 8$
- ❖ **क्रमागत आंतरिक कोण:** $\angle 4 + \angle 5 = 180, \angle 3 + \angle 6 = 180°$

Ex. यदि एक तिर्यक छेदी रेखा दो समानांतर रेखाओं को काटती है और तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ स्थित दो आंतरिक कोणों का अंतर 40° है, तो आंतरिक कोणों में से सबसे छोटा कोण ज्ञात कीजिए।

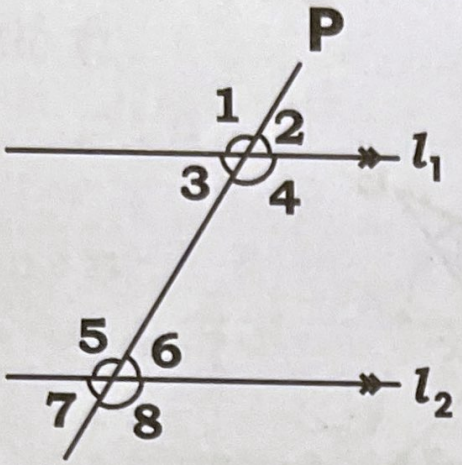
Sol. $\theta_1 + \theta_2 = 180$ .....(i)

$\theta_1 - \theta_2 = 40$ .....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से

$\theta_1 = 110°, \theta_2 = 70°$

Ex. दिए गए चित्र में $l_1 \parallel l_2$ हैं और p उनकी अनुप्रस्थ रेखा है, जहाँ $\angle 4 = 5x + 35°$ तथा $\angle 7 = 45°$ है। x का मान ज्ञात कीजिए।



Sol. $\angle 4 = 5x + 35°$

$\angle 7 = 45°$

$\angle 7 = \angle 3 = 45°$

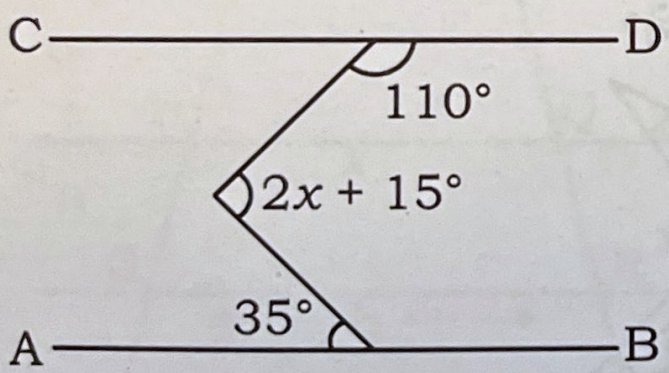
$\angle 4 + \angle 3 = 180°$

$\Rightarrow 5x + 35° + 45° = 180°$

$\Rightarrow 5x = 100°$

$\Rightarrow x = 20°$

Ex. नीचे दिए गए चित्र AB || CD में, x का मान ज्ञात कीजिये?

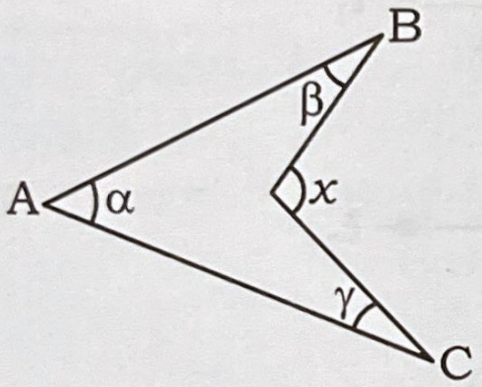


Sol. $2x + 15 = 35° + 70$

$\Rightarrow x = 45°$

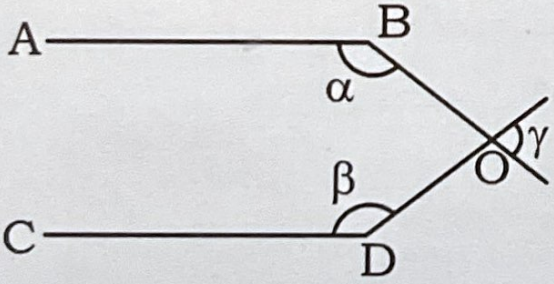
❐ कैंची चित्र पर आधारित





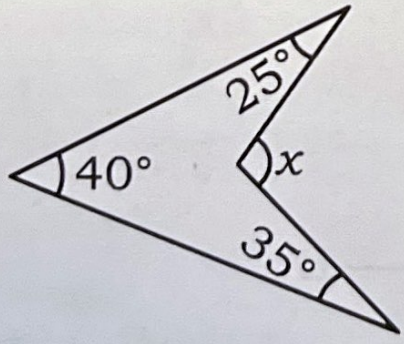
$x = \alpha + \beta + \gamma$

❐ यदि AB || CD तब $\alpha + \beta + \gamma$ का मान ज्ञात करें



$\alpha + \beta + \gamma = 360$

Ex. x का मान ज्ञात कीजिये?



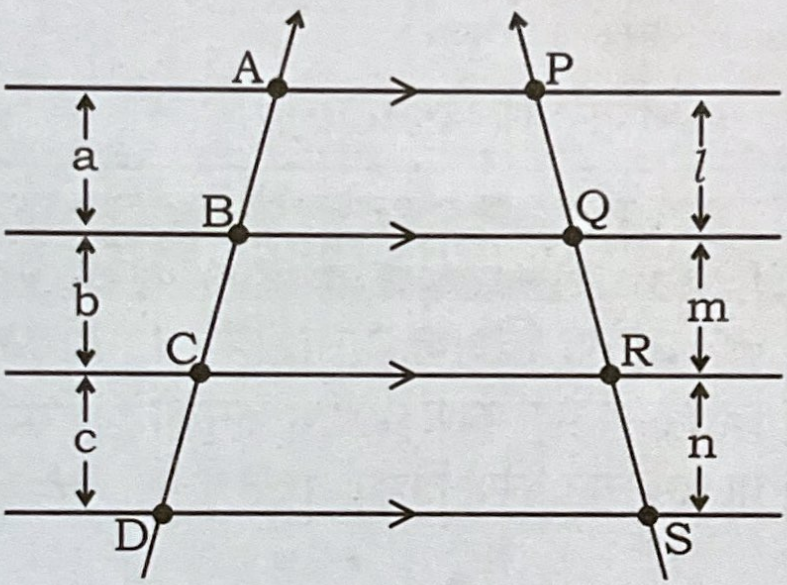
Sol. $x = 40° + 25° + 35° = 100°$

Some Important results (कुछ महत्वपूर्ण बिंदु)

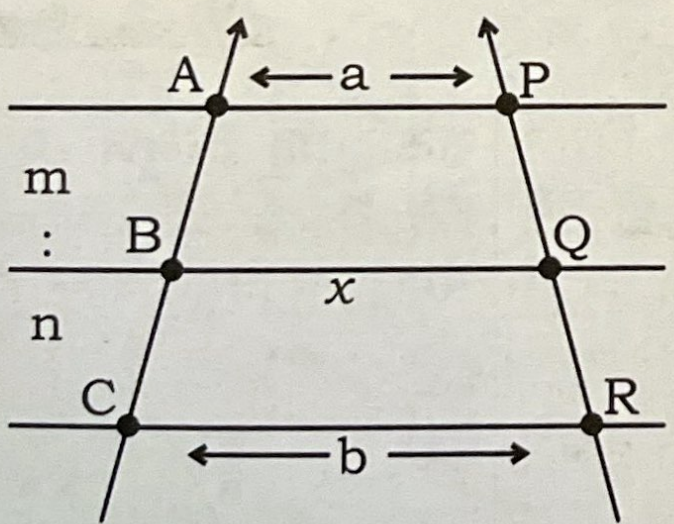
❒ जब AP || BQ || CR || DS हों और इन रेखाओं को दो तिर्यक रेखाएँ काटती हों।

तब, $a : b : c = l : m : n$

or $\dfrac{a}{a+b+c} = \dfrac{l}{l+m+n}$



जब AP || BQ || CR और इन रेखाओं को दो तिर्यक (छेदी) रेखाओं द्वारा काटा जाता है।



$$x = \frac{mb + na}{m + n}$$

Triangle (त्रिभुज)

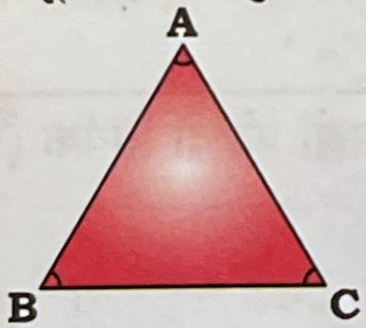
त्रिभुज के प्रकार

कोणों के आधार पर
- न्यूनकोण त्रिभुज
- समकोण त्रिभुज
- अधिक कोण त्रिभुज

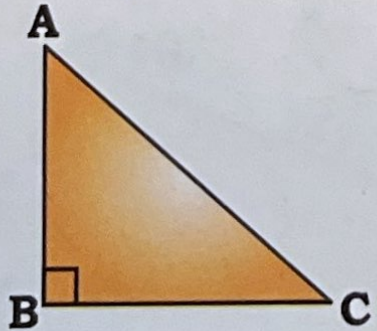
भुजा के आधार पर
- विषमबाहु त्रिभुज
- समद्विबाहु त्रिभुज
- समबाहु त्रिभुज

कोण के आधार पर त्रिभुज

न्यूनकोण त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसका प्रत्येक कोण 90° से कम हो तो उसे न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं।

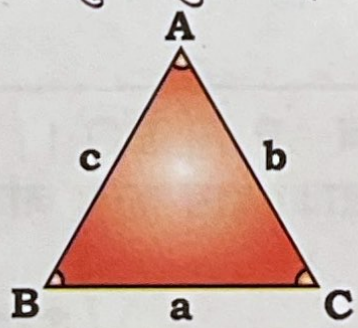


समकोण त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण 90° हो उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं।

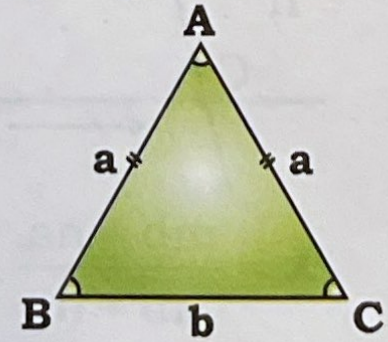


भुजा के आधार पर त्रिभुज

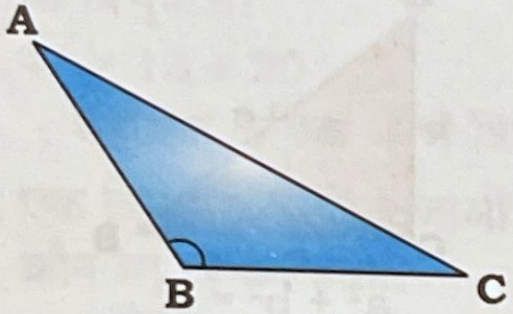
विषमबाहु त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ अलग-अलग हो उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं।



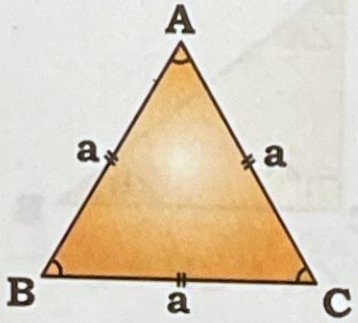
समद्विबाहु त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसकी दो भुजा बराबर हों उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।



अधिक कोण त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण 90° से अधिक हो उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।



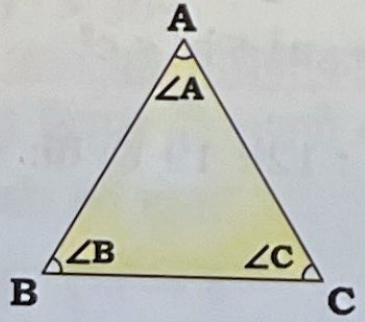
समबाहु त्रिभुज: ऐसा त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं।



कोण और भुजा के अनुपात के आधार पर त्रिभुज की पहचान

कोण के अनुपात के आधार पर

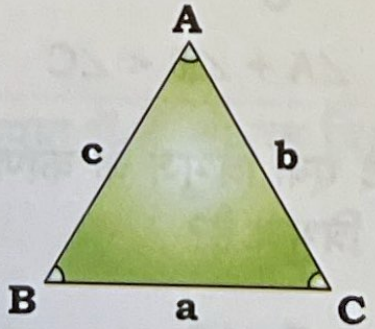
त्रिभुज के दो कोणों के अनुपात का योग तीसरे कोण से बड़ा हो तो त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।



$\angle A + \angle B > \angle C$

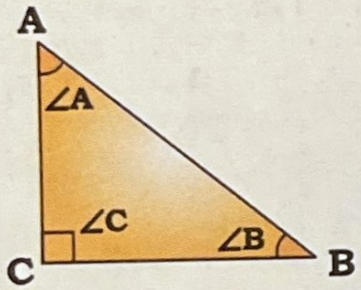
भुजा के अनुपात के आधार पर

त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग सबसे बड़ी भुजा के वर्ग से बड़ा हो तो त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।



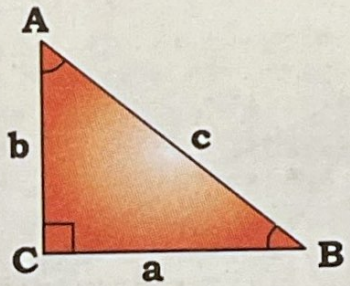
$a^2 + b^2 > c^2$

यदि दो कोणों का योग तीसरे कोण के बराबर है तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।



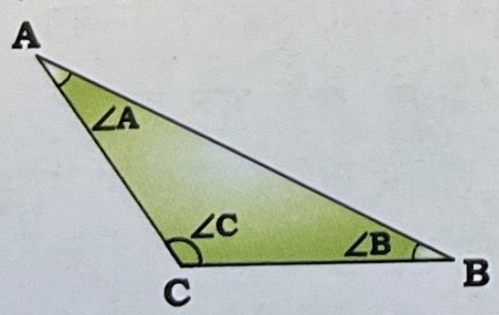
$\angle A + \angle B = \angle C$

त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग सबसे बड़ी भुजा के वर्ग के बराबर हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज कहलाता है।



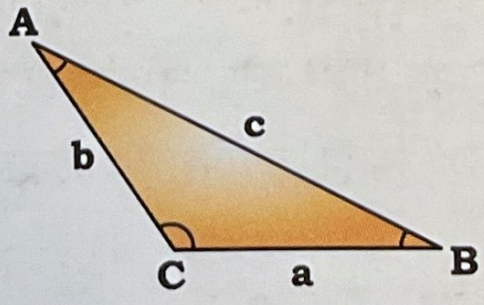
$a^2 + b^2 = c^2$

त्रिभुज के दो कोणों के अनुपात का योग तीसरे कोण से कम हो तो त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।



$\angle A + \angle B < \angle C$

त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग सबसे बड़ी भुजा के वर्ग से छोटा हो तो त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।



$a^2 + b^2 < c^2$

Ex. यदि एक त्रिभुज के कोणों का अनुपात 7 : 12 : 19 है, तो: यह कौन सा त्रिभुज है?

Sol. 19 = 7 +12

∴ यह एक समकोण त्रिभुज है।

Ex. यदि एक त्रिभुज के कोणों का अनुपात 10 : 13 : 18 है, तो यह कौन सा त्रिभुज है?

Sol. $18 < 10 + 13$

∴ यह एक न्यूनकोण त्रिभुज है।

Ex. यदि एक त्रिभुज के कोणों का अनुपात 13 : 20 : 41 है, तो यह कौन सा त्रिभुज है?

Sol. $41 > 13 + 20$

∴ यह एक अधिक कोण त्रिभुज है।

Ex. एक त्रिभुज जिसकी भुजाओं की लम्बाई 13.3, 19, और 24.7 है, तो कौन सा त्रिभुज होगा?

Sol. भुजाओं का अनुपात → 13.3 : 19 : 24.7

→ 7 : 10 : 13

$13^2 > 7^2 + 10^2$

$169 > 149$

∴ अतः यह अधिक कोण त्रिभुज है।

Ex. यदि किसी त्रिभुज की तीन ऊंचाइयाँ 3 : 4 : 5 के अनुपात में हैं, तो वह त्रिभुज किस प्रकार का होगा?

Sol. $a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12$

$20^2 > 15^2 + 12^2$

$400 > 369$

∴ अतः यह अधिक कोण त्रिभुज है।

Ex. एक त्रिभुज की भुजाएँ 4 : 5 : 6 के अनुपात में है, तो वह त्रिभुज किस प्रकार का होगा?

Sol. बड़ी भुजा → 6

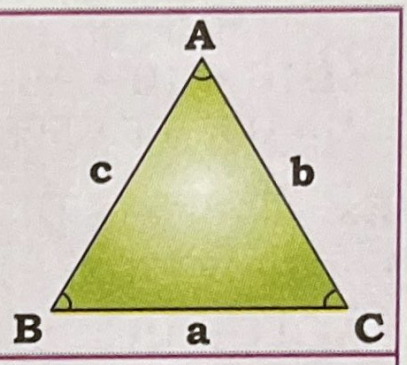
$6^2 < 4^2 + 5^2$ $\qquad 36 < 41$

∴ यह एक न्यूनकोण त्रिभुज है।

त्रिभुज की असमानता

- त्रिभुज का निर्माण तभी संभव है जब दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक हो

$a + b > c,\ b + c > a,\ c + a > b$



- यदि दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से छोटा हो तो त्रिभुज बनेगा।

$a - b < c,\ b - c < a,\ c - a < b$

$\therefore\ |c - a| < b < (c + a)$

Ex. एक त्रिभुज की तीन भुजाओं की लम्बाई 19 सेमी, 25 सेमी और y सेमी है। निम्नलिखित में से कौन सा विकल्प y का संभावित मान अधिक सटीक रूप से बताता है।

(a) $6 \le y \le 44$ (b) $6 < y \le 44$

(c) $6 \le y < 44$ (d) $6 < y < 44$

Sol. (d) $|25-19| < y < (25 + 19)$

$= 6 < y < 44$

Ex. 2 सेमी, 5 सेमी, 7 सेमी और 8 सेमी लंबाई वाले रेखा खंड में से किन्हीं तीन रेखा खंड को लेने पर बनने वाले त्रिभुजों की संख्या क्या होगी?

Sol. (2, 7, 8), (5, 7, 8)

अतः दो त्रिभुज संभव हैं।

Ex. यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई 6 सेमी और 12 सेमी है, तो तीसरी भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

(a) 8 सेमी (b) 6 सेमी

(c) 12 सेमी (d) 14 सेमी

Sol. $|c - a| < b < (c + a)$

पहली शर्त माना बराबर भुजा 6 है तो

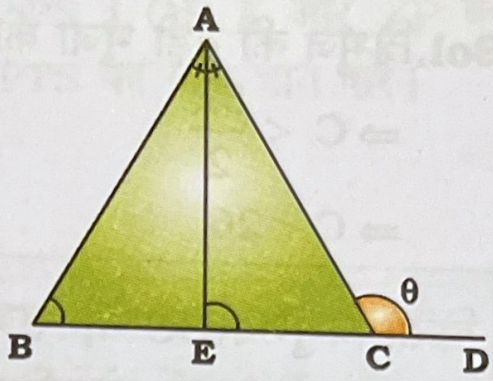
$6 + 6 = 12$ (अतः यह त्रिभुज का निर्माण नहीं करेगी)।

दूसरी शर्त माना बराबर भुजा 12 है तो

$(12 + 12) > 6$, $(12 + 6) > 12$

(अतः यह त्रिभुज का निर्माण करेगी)।

अतः तीसरी भुजा की लंबाई = 12 सेमी



Ex. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ 876 सेमी और 678 सेमी हैं और तीसरी भुजा एक पूर्णांक है, तो संभावित त्रिभुजों की संख्या ज्ञात कीजिए।

Sol. त्रिभुजों की संख्या = 2 × छोटी भुजा की संख्या – 1

त्रिभुजों की संख्या = $678 \times 2 - 1 = 1355$

❑ किसी त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा की लंबाई उसके परिमाप के आधे से छोटी होती है।

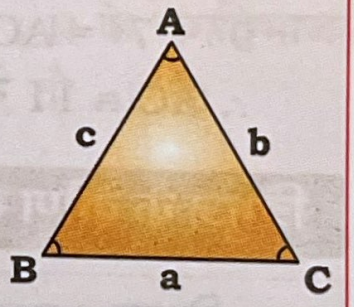
$c < (a + b)$

$(c + c) < (a + b + c)$

$2c <$ परिमाप

$c < \frac{\text{परिमाप}}{2}$

जहाँ c = बड़ी भुजा की लंबाई है।



Ex. यदि किसी त्रिभुज का परिमाप 52 इकाई है तो उसकी सभी भुजाओं की लम्बाई क्या होगी?

(a) <26 (b) <20

(c) <24 (d) <18

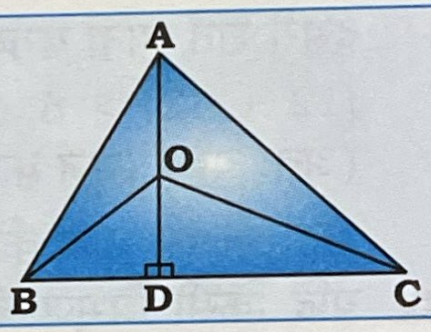
Sol. त्रिभुज की बड़ी भुजा की लम्बाई $< \frac{\text{परिमाप}}{2}$

$\Rightarrow C < \frac{52}{2}$

$\Rightarrow C < 26$

किसी त्रिभुज ABC में, AD ⊥ BC,
AD पर कोई बिन्दु O है, तब

$$\boxed{AB^2 + OC^2 = AC^2 + OB^2}$$



Ex. एक Δ ABC में, AD भुजा BC पर लम्ब है। लम्ब AD पर एक बिंदु O इस तरह है कि, AB = 9 सेमी OB = 3 सेमी, OC = 7 सेमी तो भुजा AC की माप ज्ञात करे।

Sol. $AB^2 + OC^2 = AC^2 + OB^2$

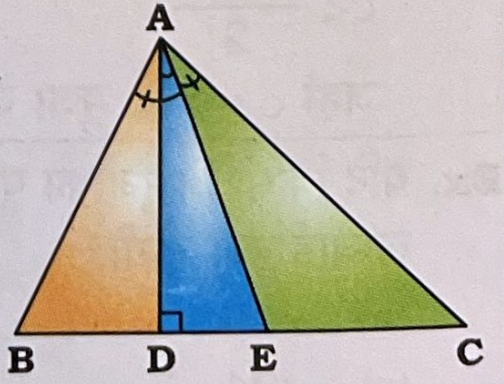
$9^2 + 7^2 = AC^2 + 3^2$

$\therefore$ AC = 11 सेमी

त्रिभुज के कोण समद्विभाजक पर आधारित

❐ त्रिभुज ABC में, AE ∠BAC का कोण समद्विभाजक है और AD भुजा BC पर खींचा गया लम्ब है। तो

$$\angle DAE = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

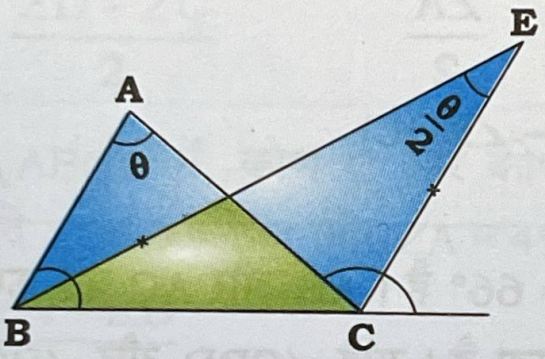


Ex. ΔPQR में, $\angle Q = 84°$, $\angle R = 38°$, $PS \perp QR$ है और $\angle P$ का समद्विभाजक T पर QR से मिलता है $\angle PTS$ का माप ज्ञात करें।

Sol. $\angle SPT = \dfrac{84 - 38}{2} = 23°$

$\angle PTS = 180 - 90 - 23 = 67°$

❐ त्रिभुज ABC में, आंतरिक कोण $\angle B$ का कोण समद्विभाजक और बाहरी कोण $\angle C$ का कोण समद्विभाजक E पर मिलते हैं। तो



$\angle BEC = \dfrac{1}{2}\angle BAC$

Ex. ΔPQR में, आंतरिक कोण $\angle Q$ और बाह्य कोण $\angle R$ के समद्विभाजक S पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle QSR = 40°$ है, तो $\angle P$ है:

Sol. $\angle QSR = \dfrac{\angle P}{2}$

$40 = \dfrac{\angle P}{2}$

$\boxed{\angle P = 80°}$

❐ त्रिभुज ABC में, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक I पर मिलते हैं। तब,

$\angle BIC = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$

